幾何学をみる
3

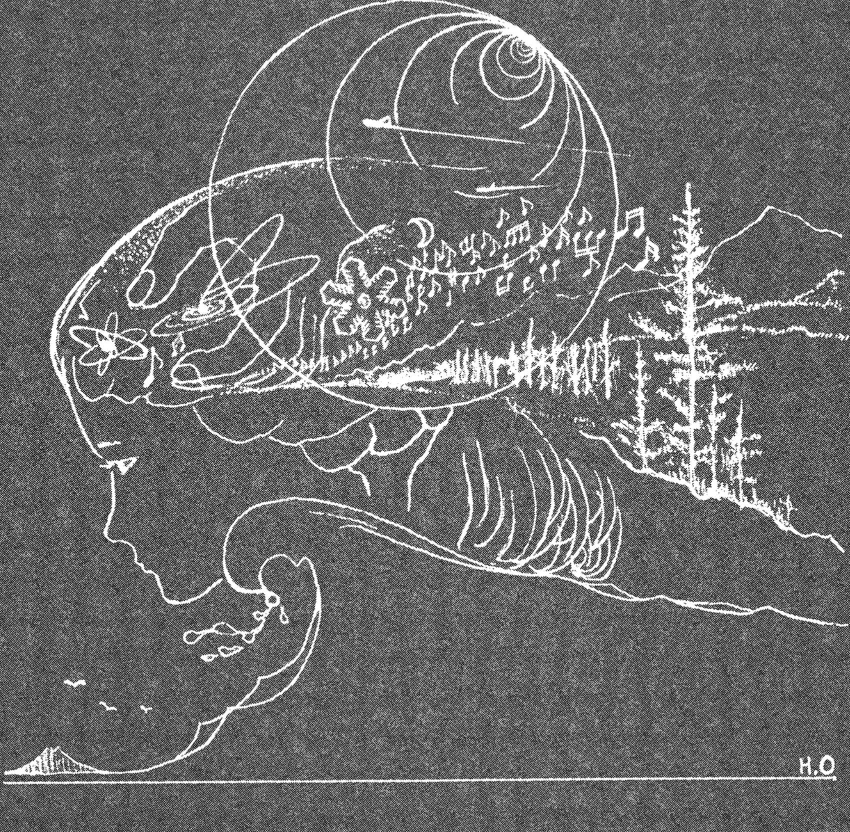
幾何学への新しい視点

不確定性と非可換時空

大森英樹 著

発行 遊星社

幾何学をみる③


H.O

幾何学への新しい視点

不確定性と非可換時空

大森英樹 著

遊星社

はじめに

この一文の初版（『幾何学をみる』遊星社）から20年も経ってしまった．その間，数学，物理の双方でさまざまな進展はあったが，基本的，原理的な問題「時空とは何か」はやはり20年前とほとんど変わらず残っている．残ってはいるが，20年前と比べて大きく変わったのは，この問題をまともに考えるべきだと思っている人たちが増えてきているということである．これは携帯電話などの影響も無視できないことだが，現代人の時間に対する感覚が大きく変わろうとしているからである．

数学も「時間」というものを取り入れた新しい数学を作るべきだなどと言うと，今でも気違いじみた話と受け取るむきもあるから，この話題は一種のタブーなのだが，これも最近は薄れてきたと思うから，遊星社の西原氏から書き直しを頼まれていたことでもあるし，この古くて新しい問題を再度考えてみるのは価値あることのように思われたので書き始めたのであるが，「時間」という曲者に捕まって，なかなか考えがまとまらない．

そこで，思いきって，前とは全く別の構成で（自分の頭の中を直接表現するなどという気違いじみたことはやめにして，もう少しバランス感覚のある文章で）書いてみることにした．昔からの疑問ではあったが，私にはどうしても，E. Cartan が暗黙のうちに用いて

いる時空概念（接触構造に現れる時間概念）と，A. Einstein の時空概念が同じもののようには思われないので，このような一文を書く気になったのである．

しかし，記述にはどうしても数学記号を使わねばならず，それの定義まで教科書風にやろうとすると，たちまち紙面がふくれあがる．そこで思いきって，教科書スタイルを捨てることにして，読者は，わけのわからない記号でも雰囲気だけ理解できれば先を読めるように工夫してみた．正確な数学的理解を求める人はそれなりの教科書を脇に置いておかねばならないが，雰囲気だけの読者は「数学的によく論議されているのである」ということを感じてもらえばそれでよい．

2008 年 9 月

著　者

目　　次

はじめに *5*

1章　矢は永久に進めない？ **11**

1.1　論理は時間を捨象する *12*

1.2　矢は進めるようになったか？ *19*

2章　水平線って見えるんですか？ **21**

2.1　境目としての数 *22*

2.1.1　円錐曲線 *24*

2.1.2　言語も時間を捨象する *25*

2.1.3　50 年前の未来予測 *26*

3章　曲がってもまっすぐ？ **28**

3.1　いろいろな「まっすぐ」 *29*

3.1.1　剛体と初等幾何 *31*

3.1.2　合同群，ガリレイ群 *33*

3.2　束縛運動 *36*

3.2.1　空間曲線，曲面片 *37*

3.2.2　ニュートンの運動法則 *39*

3.2.3　線素，クリストッフェル記号 *43*

3.2.4　曲面人にとって加速度とは？ *46*

3.3 最短コース 49
3.3.1 微分と積分の順序交換，部分積分 49
3.3.2 変分学の基本補題 52
3.3.3 全能神の存在証明？ 53

4章 光にとってのまっすぐとは？ 55
4.1 何も無いのが在る？ 55
4.2 光って何？ 61
4.2.1 ローレンツ多様体 62

5章 カラテオドリーの熱機関社会学 66
5.1 熱力学の第1法則，第2法則 68
5.2 絶対温度，エントロピー 73
5.2.1 エントロピー増大の法則 76
5.3 一般力学系との比較 78

6章 時空が非可換？ 83
6.1 非可換有向正規順序群 84
6.1.1 1径数自己同型群 89
6.1.2 ローレンツ内積 95
6.2 共同描像 98
6.2.1 ローレンツ群 103

7章 勉強すると叱られる？ 108
7.1 時の流れ，無為 110
7.1.1 因果関係 vs 論理関係 112
7.2 操作行動の数学模型 116
7.2.1 みなし逆元 119

8章　個数概念は安泰か？　123

8.1　回数としての自然数の概念 …… *126*

8.1.1　回数と個数の違い …… *128*

8.2　多様体社会学の共同描像 …… *130*

9章　同一人物が二人居る？　132

9.1　代数表示のデフォルメ …… *132*

9.1.1　多項式環の積の変形，相互変換 …… *133*

9.1.2　ヤコビの楕円テータ関数 …… *139*

9.2　多価の元の数学的例 …… *144*

9.2.1　２次式の指数関数，相互変換 …… *147*

10章　普遍的不確定性？　152

10.1　ワイル代数，ハイゼンベルグ代数 …… *153*

10.2　表示と相互変換 …… *156*

10.2.1　１次式の指数関数と非可換トーラス …… *157*

10.3　２次式の $*$-指数関数 …… *161*

10.3.1　真空表現，微積分の代数 …… *163*

11章　行動群という考え　166

11.1　直観世界 …… *169*

11.2　行動，半群，群 …… *171*

11.3　行動の言語化と半群構造 …… *176*

11.4　創 造 性 …… *184*

参考文献 …… *187*

索　引 …… *189*

●コラム　*57, 151, 165*

本書では本文の中，式の中に次のような記号が使われているので，その意味（読み方）を表にして掲げておく：

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$	自然数全体，零を含む自然数全体
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	整数全体，実数全体，複素数全体
$\therefore\ \cdots$	ゆえに$\cdots$
$\forall\cdots$ に対して	任意の$\cdots$に対して
$a\in A$	a は集合 A の元
$\forall a\in A$ に対し	集合 A に属する任意の a に対し
$A\Rightarrow B$	A ならば B
$A\cap B$	集合 A と B の共通部分
$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$	A_α すべての共通部分
$A\cup B$	集合 A と B の和集合
$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$	A_α すべての和集合
$\coprod_{\alpha\in I} A_\alpha$	直和集合，$A_\alpha\cap A_\beta=\phi$（空集合）
$A\times B$	$a\in A$, $b\in B$ の組全体，直積集合
$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$	A_α すべての直積集合

1

矢は永久に進めない？

ギリシャ時代のパラドックスに「矢は永久に進めない」というのがある．奇妙に思うかもしれないが，これは純論理的に運動を考えることはできないと言っているのである．連続体とか極限の概念がなかったせいだと簡単に片づけられてしまうことが多いが，どうしてこういうことになるのか考えてみよう．

速度（速さ）とは単位時間 Δt あたりの移動距離 Δx のことだと教わる．「比」という考え方ができれば，これは理解できるだろう．問題は，この程度の素朴な考え方で，区間 $[a,b]$ を a から b へ矢が進んでいるものとして，矢が 1 点 x を通過するときの「瞬間速度」をどう考えるのかである．「点とは位置のみあって，大きさのないものである」 長さ 0 の区間を矢が通過するのに要する時間を 0 と考えてしまえば $\dfrac{0}{0}$ で不定だが，（矢は線分だろうから）なにがしかの時間がかかるものとしてしまえば区間 $[a,b]$ の中に点が無数にあるのだから，a から b へ矢が移動するのに要する時間は ∞ となり，「矢は永久に進めない」ことになる．

幼少の時代から素朴に正直に考えてくればだれだって，似たような矛盾につきあたるのである．むしろ，この矛盾につきあたらない

ほうが，不自然な成長過程なのである．ギリシャの俊才たちが解けなかった謎（なぞ）が今の高校生にとっては当たり前などということが起こりえようか？

1.1　論理は時間を捨象する

ギリシャ時代の「雄弁術」は相当発達していたものらしい．これは言わずと知れた三段論法を駆使して相手を言い負かす術（すべ）で，**論理関係**を基礎にしている．まず，論理関係というものがどのようなものを基礎にしているかを考えよう．

前の稿で，幼児は頭の中だけで自分の行動の記憶集を整理統合したり比較したりするような行動をおこなっていると述べたが，ここではそれがどのようなものであるかをまず考えてみよう．

●「同じ」ということ（同値律）　幼児は行動の記憶集の中からいくつかを取り出してきて，同じ行動と判断したり違うと判断したりして記憶を整理している．これは頭の中で何をやっていることになるのか，単純なようにみえていて大変に難しい問題である．飢えた人間にとっては「1 週間前に食事をした」ということと「今朝食事をした」ということでは全く意味が違う．「食事をした」という点では同じことではないかと考えるわけにはいかない．ネジを「右へ 90° 回転してから左へ 90° 回転する」のは「何もしなかった」のと同じことなのであろうか？　そうも考えることができるし，力をだしてネジを回したのだから全く違うものだと考えることもできる．

だから何を同じものとみるのかということは，使用している基準によることであって，絶対的な基準というものは存在しないのであ

る.「同じものが二つある」という言い方になんの矛盾も感じない人でも,「同一人物が二人いる」と言われたら矛盾を感じるであろう.これと同じことで,(絶対的な意味で）全く同一な行動が複数あるというのは論理的な矛盾なのである[1].

おそらく，人間が記憶をよびさますしかけにはたくさんの種類があって，それのどういう部分が働いているかによって A と B とが同じものとみえたりみえなかったりするのだと思うが，ともかく，幼児は一定の条件のもとで記憶をよびさまし，その条件下で同じ行動とみなしたものをひとまとめにして別の所に記憶するといった作業を頭の中で繰り返すものと思われる，人は眠っている間にもこういう作業をおこなっているのである(逆説睡眠)．このことは，眠っているときに見る夢がかなり現実離れしていることがあることを思いだしてもらえば理解できることである.

幼児がどんな具合にしてたくさんある基準のひとつを選びだすのかはわからないことだが，自分の場合で考えてみると,「忘れてしまう」ということ，つまり行動 A の記憶を全部取り出すのではなく，うっかり一部分だけ取り出してしまうという人間の頭の不完全さがこの場合重要な働きをしているように思えてならない．A の一部分しか取り出していないのに，A 全部を取り出した**つもり**になっていることが大切なことなのである．不正確に取り出された A と，不正確に取り出された B という行動の記憶を，頭の中だけで入れかえてみるといった空想を，幼児はしょっちゅうやっているのだと思われる．A と B とを入れかえても全体として不自然なことが起きなけれ

1) にもかかわらず，量子論の中ではこの奇妙な概念をなんとか数学の中に組み入れようとするのである.

ば，たぶん A と B とが同じものと判断されて，ひとまとまりとなって頭の別の所にしまわれてしまうのであろう．行動の記憶は頭の中で，さまざまな基準により分類され続けるのである．後方のために，個人の行動（の記憶）全体を $\mathbb{B}$ と書いておく．

この場合，分類の基準そのものを表現しようとしても，それを述べきるだけの言葉はそろっていないから，結局，分類された結果全体をみわたして，それによって使っている基準を表現するしか方法はあるまい．分類するという積極的な行動や，そのときの基準を，分類結果という「静的」なものを使って表現していることにはなるのだが，数学の論理では分類という作業は，次のような**同値律**とよばれる関係を対象に持ち込むことだと考えられている．いまの場合，対象とは（不正確に）取り出された行動の記憶の総体のことである．同値律とは

(i)　$A \sim A$　（反射律）

(ii)　$A \sim B$ なら $B \sim A$　（対称律）

(iii)　$A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば $A \sim C$　（推移律）

をみたすような関係 $\sim$ のことである．よく見ると，この $\sim$ は等号 $=$ が持っている性質（論理構造）を書いているだけだということがわかるだろう．我々が，A と B とが「同じである」と言うときの「同じ」という言葉が持つべき最低の性質だけを抜きだしているのであって，基準の取られ方には何も言及しない書き方であることに注意してもらいたい．数学的にみた場合，分類作業とは，上のような同値律を対象に持ち込むことであるが，持ち込まれた結果について云々（うんぬん）しているのであって，「持ち込んでいく過程」などが現れているのではない．

$[A]$ という記号で，A と同値，つまり $A \sim B$ となる B の全体を表し，これを A の**同値類**とよぶ．これは，頭の中では同じものとみなされるものだから，別の所にしまわれるときには一つのものとしてしまわれるものである．

我々が使う言語，概念はそれがどんなに絶対的にみえようとも，かなり大きい所に何重にも持ち込まれた同値律による同値類に貼られたラベルにすぎない．

●比べる……（擬順序，半順序） 同値律を持ち込んで分類するのだと述べたが，子供の動作を観察してみると，子供が実際に頭の中でおこなうのは勝手に二つ取り出してきて比べてみるということであって，行動の全体に一気にある同値関係を持ち込むのではないようにみえる．反射律，対称律にかかわる判断は瞬時にできるとしても，推移律にかかわるものは，$A \sim B$ が一気にわかるのではなく，$A \sim A_1$, $A_1 \sim A_2, \cdots, A_n \sim B$ のように間にいくつものものをはさんで間接的に判断されることが多いからである．

このことは，子供がある基準による分類作業を終了するためにはかなりの時間を必要とすることを意味するわけで，その間，基準のほうは安定して一定でないと分類作業そのものがこわされてしまうことを意味する（なまくら同値律）．

大人の場合には，分類基準のほうが分類作業そのものより先に言語化されるのが普通だから，基準が安定しているのは当然だが，幼児の場合どういうもので安定化をはかっているのかよくわからない．もしかすると，幼児の場合には基準そのものもあまり安定していないものかもしれない．大人から見ると同じことに思えることが幼児にとっては全く違ったものに見えていることがあることは，子供を

育てた経験のある人はみな知っていることである(朝三暮四).

●なまくら同値関係の例　1から100までの数からなる集合をSとし，S_iをSから数iだけが除かれた99の数からなる集合とする．$\{S_i\,;\,i=1,2,\cdots,100\}$に関係$\cong$を

$$S_i \cong S_j \Longleftrightarrow \text{連続する二つの数以外の 98 個が同じとき}$$

と定義する．この関係が反射律，対称律をみたすことはあきらかであろう．大部分が一致したら同じと思うと言っているから，何かを分類するために導入する意味のある同値関係のようにみえるが，推移律まで考えると，$S_1 \cong S_2 \cong \cdots \cong S_{100}$だから結局全部同じと定義しているだけで，何も分類していない．

●似ているがなまくらでない例　無限個の自然数からなる集合をたくさん考えて，$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$とする．$S_i$と$S_j$が同値$S_i \cong S_j$とは有限個の例外を除いて中身が一致するときと定義する．大部分が一致したら同じと思うと言っているのだから上の話と同じように思えるが，こちらは意味のある同値関係で，全部同じなどとはならない．有限集合と無限集合の違いを味わってほしい．

ところで，二つのものを比べる場合，同じかどうかを判定していると同時に，一方が他方を含む，つまり，AはBに置き換えられるが，BはAに置き換えると不自然であるといった関係とか，強弱のような関係も同時にみているはずである．AがBに置き換えられるということを，数学的記号で

$$A \succ B \qquad (\text{または } B \prec A)$$

と表現してみよう．幼児は頭の中でおこなう，比較するという行動で，それまでの行動の全体にこういう関係を入れているのだと考え

ることができるし，これが同じであるという判定より先にあると考えることもできる．これは

1)　$A \succ A$　　（反射律）

2)　$A \succ B$ かつ $B \succ C$ ならば $A \succ C$　　（推移律）

をみたしているもので，このような関係を**擬順序**関係というのだが，A を B に置き換えることができ，B を C に置き換えることができれば，A を C に置き換えることができるという性質である．幼児がこのような論理性を持ち始めていることは確かのようであるが，

「$A \succ B$ かつ $B \succ C$ ならば $A \succ C$」で**あるべき**である

といった，徹底した意味での論理性であるかどうかはわからないことである．しかもこの関係は，普通の「じゃんけん」のルールや，右の図のようなぐるぐるまわりになる関係も許している．人間関係の強弱のような関係はこのような擬順序関係であることが多いと思うし，こういう関係のほうにのみ興味を持つ子供も多いと思う．

$$\begin{array}{ccc} A & \succ & B \\ \curlywedge & & \curlyvee \\ D & \prec & C \end{array}$$

ところで，擬順序関係を使って同値関係を入れるときには，$A \succ B$ でありかつ $B \succ A$ であるとき $A \sim B$ と判定するという基準になる．これが同値関係のみたすべき (i), (ii), (iii) をみたすことはすぐに確かめられるだろうが，「じゃんけん」ルールのようなぐるぐるまわりのところでは $A \sim B \sim C$ となってみな同値となってしまうので，人間関係の強弱のようなものだけに興味のある人にとっては面白くない関係だと思う．

発達心理学的にみてどちらが先かとか，何に対して定義されてい

るかということをいっさい無視して，数学では，対象としての集合に定義された関係 $\succ$ が次の (a), (b), (c) の性質をみたすとき**半順序関係**とよぶのである：

(a)　$A \succ A$　（反射律）

(b)　$A \succ B$ かつ $B \succ A$ ならば $A = B$　（対称律）

(c)　$A \succ B$ かつ $B \succ C$ ならば $A \succ C$　（推移律）.

これまでの述べ方からすると性質 (b) では $A = B$ と書かずに $A \sim B$ と書いたほうがよい場所であるが，(理由は不明だが) 等号を用いて書く習慣になっている．半順序関係の定義された集合を，**半順序集合**とよぶ.

幼児は頭の中で,「比べてみる」という行動を繰り返して，行動の記憶全体の中に次々と擬順序関係，半順序関係を持ち込んでいくのであると考えられる．しかし，$A \succ B$ ということの判定も，$A \sim B$ の場合と同様に，なんらかの基準が必要なことであって，その基準の取り方によって定義される関係が変わることは言うまでもない.

これでわかるように，論理関係を考えるときには時間を無視している．論理的に考えるといっても論理を瞬時に操ることはできないから，なにがしかの時間を食う.「見比べる」などという簡単な動作ですら，なにがしかの時間を必要とする．まして，時間と共にどんどん変化するものを論理的に考えるのは難しい．論理は時間を捨象するのである.

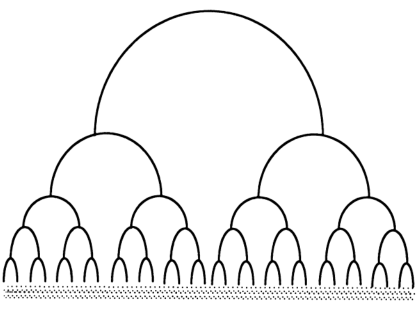
1.2　矢は進めるようになったか？

さて，前節のような論理だけで，運動をコントロールしようとしてみよう．

ギリシャ時代には個数としての自然数，「比」としての数の概念はあったが，無限小数による数の記述法はなかった．しかし，話は2進無限小数を使ったほうが説明しやすいので，ここではそれを使う．たとえば 1.1100101… とか 1.0010101… とか

$$a_0.a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1}\cdots,\quad a_i=0\text{ または }1$$

のように2進無限小数で書かれている数字があるとする．この数字をコントロールして，実数点が0から1まで滑らかに動いていることを表現できるか考えてみよう．次の図は「無限分かれ滝」とよばれる構造で，左の枝は1に，右の枝は0を表しており，n 段目は小数 n 桁目が1か0かで左へ行くか右へ行くかをきめている．



要点を言ってしまうと，一列に並んでいるとは言うが，実数直線は図のいちばん下に描かれる線であり，その点の位置はその上のほうに描かれた次々に枝分かれしている構造を使って表示しているのでひとつの点の「隣の点」というのが考えられない．**実数連続体**と

いって，直線を描き，あたかも何かが一列に並んでいるかのようにイメージして言うのだが，その上を滑らかに連続的に動く点はイメージはできても，小数桁を操作してコントロールすることはできない.

ギリシャ時代の論理では（今でもそうだが)，自分でコントロールできないものを論理の中に入れることは違反で，これをやると，超論理を使った（信ずるに値しない)「神がかり論理」とみなされるのである.

人間は連続体内の運動を直接手をくだしてコントロールすることはできず，いつでも，自然界のルールとして時間がそれをコントロールしていると思われるものを**間接的に操作**して運動をコントロールするのである．これが運動に対する人間の側の限界である.

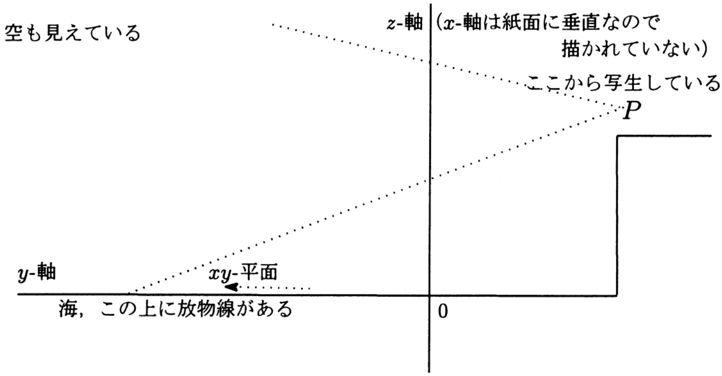
これは，テープレコーダーくらいのアナログの録音技術しかなかった時代にモーターのような駆動部分を含まない録音再生機を作ろうと試みた人ならば経験していることである.

しかし，今日「運動は論理的には考えられない」などと言う人はいない．道具の発達によって，道具を使って巧みに（そして部分的には論理的に）運動をコントロールすることができるようになったので，論理的な不可解さが減ってきたからである．しかし,「連続体」が持つ根本的不可解さが消えたわけではない．人は時間をコントロールしているのではない．人間の意志ではなく，自然界のルールを利用して運動を間接的にコントロールしているだけである.

2

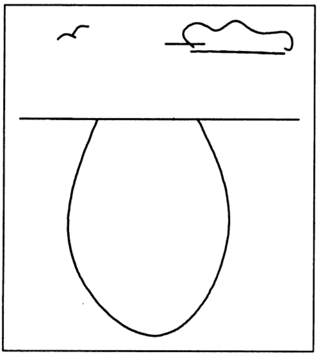
水平線って見えるんですか？

いろんな機会に学生に次のような問題を出している．



海はどこまでも平らな，平面であるとする．この海面を (x,y) 座標平面だと思って，そこに $y=\frac{1}{4}x^2$ という放物線が描かれているものとする．この放物線を地点 $(x,y,z)=(0,-50,50)$ くらいの上空（あるいは丘の上）から眺め「写生」したものとして図を描きなさい．ただし画面には海と空とが両方描かれているようにしなさい，というのが問題である．この場合，海面上に放物線が描かれているとだけ考えて，係数 $\frac{1}{4}$ は放物線があまり細長くなるのを防ぐためだけだから，気にしなくてよい．

写生図はそれ自身で論理的に閉じているものである．しかし，最近は，どうも絵が苦手な学生が増えてきている．第一，写生という言葉は知っていても，透視図法とか，遠近法という言葉が通じなくなっている．ある学生は高校で写生などやったことがないと言っていたし，遠近法なんて習ったことがないと言う者もいた．大概の学生の最初の絵は左のように水平線が舌を出しているような絵であるのだが，あるとき「海がどこまでも平面だったら，水平線って本当に見えるんでしょうか」と質問してきた学生がいた．地球が丸いから接線が描けるが，海が平らだったら接線は引けないから，見えないのでは？と言うのである．



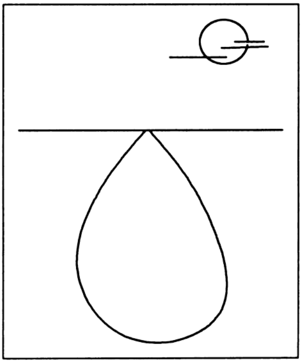
そのときの会話は，「じゃ，ちょっと上を見ると何が見えますか？」「空が見えます」「じゃちょっと下を見ると何が見えますか？」「海が見えます」「じゃ，その境目は？」「･･･」だったのだけど，いずれにしろ水平線の近くがどうなっているのか，かなりとまどうように見える．

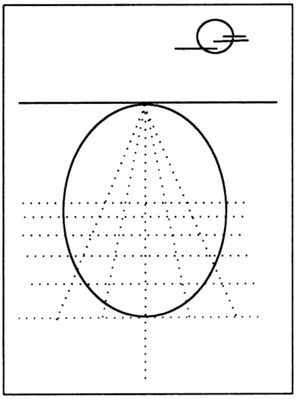
2.1 境目としての数

「見えているってことは，実在してるってことだ」という素朴な考えは大学生くらいになってもかなり残っている．確かに，「ほれ，これが水平線ってものだよ」という具合に目の前に持ってくることは

できないし，実在する直線でもない．水平線の近くがどうなっているのか，とまどっている学生に対して今度は「まず，座標系を写生せよ」という指示をだす．

するとしばらくして，絵はだいたい次のような形に修正される．そこで，さらに，「平行線は水平線で交わる直線として写生される」といった注意をいろいろ言う．「実際，廊下に出て，床のタイルが遠くのほうでどのように見えているか観察してみよ」という指示もだす．水平線の近くでの見え方を，何度も修正するのだが，この部分は実際にはとても見えない部分の写生だから，図形が自然に教えてくれる論理で考えるのである．かなり何度も修正はするが，時間をかけると大多数は左の図のような形まで到達する．



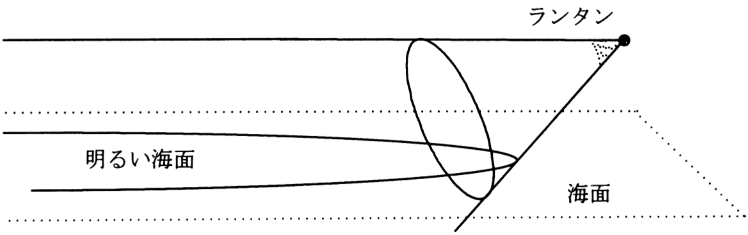


水平線は境目としか意識されないものであるが，その線に下から接する楕円形が見えるはずである，と結論するためには，かなりの意志力が要るようである．

面白いことに，「地球は丸いのだから･･･」と言って水平線を湾曲させて描く学生も少なからず存在する．

2.1.1　円錐曲線

円錐(すい)曲線のことを少し経験しておれば，この辺のことはパッとわかるのだが，ヒントは次の図である．



下手なことは言わないほうがよい．絵は文章で説明するよりはるかに伝達力が強い．(もっともこれは絵が上手な場合だが ⋯)　強い光を出すランタンで海面を照らしていると思って，光が届く範囲をいろいろ考えてみるとわかる．

写生図の感覚は数学的に空間を理解するときにはなくてはならないものである．たとえば，次のような図形用語の理解である：

●**凸集合**　実線形空間 V の部分集合 C が**凸集合**であるとは $\forall x, y \in C$ に対して x, y を結ぶ線分 $\{tx+(1-t)y\,;\,0 \leq t \leq 1\}$ が C に含まれている場合をいう．V の部分集合 S を含む最小の凸集合を S の**凸包**という．V が位相線形空間のときには S を含む最小の凸閉集合を S の**凸閉包**という．

●**凸錐**　原点を含まない凸集合 C が与えられたとき，原点と C の点を通る半直線の全体を凸錐という．C が円の場合**円錐**という．

2.1.2　言語も時間を捨象する

運動を記述しようという欲求があったから連続体を持ち込んだのであるが，論理的になればなるほど，「時間」は数学から遠ざかっていったのである．

しかし，よく考えてみると，言葉そのものも時空を超越しているのである．言葉というものは，いつでもどこでも使えるから便利なのであって，そういう役目を最低負うものである以上，「今朝，食事をした」でも「1 か月前，食事をした」でも「食事をした」という言葉でひとくくりにされてしまうのである．そして言葉が論理的になればなるほど，時間から遠くなるのである．

● **(ε, δ)-論法はなぜ難しいか**　「x が限りなく a に近づくとき，$f(x)$ が限りなく A に近づく」これを記号で

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

と書く．これが，高校で教わる極限である．あきらかにこれには「近づく」という運動感覚が使われている．「動き」というのは時間抜きには考えられないから，極限の概念には時間の感覚が使われていると言ってよい．

しかし，$\sqrt{2}$ や π は無理数である．これらは図形の感覚で理解できるとしても，自然対数の底 e は図形とは関係がない．まして時間の感覚で理解できる数ではない．大学で純粋に論理的に考えるときには，時間の感覚をなるべく使わないようにする．

時間の感覚を使うと不正確になるというより，時間はあまりにも普遍的なもので，だれでも時間の感覚はあるのだが個人差がありすぎて，勝手な解釈や誤解がついてまわり，たくさんのものが「一様

に a に近づく」とか「近づき方が一様でない」などという，もう一歩複雑なことを言おうとしたときに正確に伝わらないことが多いからである．時間はいつでもどこでも一様に流れるものだという意識は強く，これが強いと各点収束と一様収束の区別は理解を超えてしまうのである．

時間の感覚を切り離して極限を論理的に考えられるようにするには素朴な実数直線を，時間の感覚を離れて「実数連続体」というものとして捉(とら)え直さないといけないのである．時間と実数連続体とは別々のものである．時間にまつわるものを，わざわざ時間を消して「静的」に述べようとするのだから言葉は日常語から離れていき難解になるのは当然である．

確かに，論理的に「矢が進めるようになる」ためには，連続体という論理が必要であった．しかし，実際の運動は連続体の論理でコントロールされているのではない．実際は自然界の何か H が目的の運動をコントロールするようにしむけているだけである．連続体の論理がどのようなものであろうとも，運動は自然界の H を論理的にコントロールできればそれで十分なのである．連続体は確かに不思議なものだが，これがわかることと「時間」がわかることとは関係がないように思える．

2.1.3　50 年前の未来予測

私が新制中学の生徒だったころに愛読していた「科学は世界を改造する」という本があった．これは来るべき科学万能時代を謳(うた)いあげているもので宇宙飛行とかロボット技術とか，はては髭剃(ひげそ)り道具にいたるまでの技術革新の未来を予測したものであった．

その本自身はどこかへいってしまったが，書かれていたことを思いだしてみると

1) 壁掛けテレビ（夢の技術とされている.）

2) ゲノム解析（絶対不可能）

3) 携帯電話（今日のような個々人が持つようなスタイルのものは予想もされていない）

といった調子で，あたっているのは髭剃り道具の進歩ぐらいのもので，あとは大きく外れている．そのいちばん大きな原因はコンピューターの計算速度，メモリー容量の幾何級数的発展を予測できなかったことにあるだろう．当時は電話を引いてもらうにも，回線が不足していているので順番待ちであったし，真空管を使う計算機が主流の時代であるから，ゲノム解析ができるほどの大型計算機の冷却にはナイヤガラの水全部を使わないとできないからだと記されていたように記憶している．

実際は時間の使い方に大変革が起こり，いまや我々は 10^{-6} 秒くらいを1単位として考えるところまできている．データを送るときの圧縮解凍技術を考えれば，我々は「時の使い方」をかなりコントロールできるところにきているのである．

光は1秒間に 3×10^{10} cm 進むとされているが，10^{-6} 秒くらいを1単位として考えると光はこの間に 3×10^{4} cm つまり1秒間の音の速さと同程度の 300 m 進むだけである．すると超音速で進むジェット機内から光信号で地上にデータを送ったときに果たして時間の前後関係は保たれているのだろうか？ 技術の進歩が否応なしに相対論とか量子論を要求し始めているのがわかるだろう．数学はこの進歩に対応しているのだろうか？

3

曲がってもまっすぐ？

「まっすぐ」って何？ と聞かれたら，たいてい「曲がってないってことだ」と答える．「じゃ，曲がっているって何？」と聞かれると，「まっすぐでないってことだ」と答える．これは，論理というやつが最も嫌う「循環論法」である．これでは何もわかったことにならない．

しかし，「まっすぐ」ということが全くわかってないのかというと，だれもそうは思わない．「適宜その場で適切な判断はできるのだからそれでよい」そういうわかりきったことをくどくど問題視するのを「屁理屈」という，と言ってたいていなじられる．反抗期の子供を圧殺する「大人」の論理である．

数学では，そういう大人の常識はいわない．数学の先生が反抗期の子供にわりと信用されている原因がこのようなところにあるのだということを教育委員会は知るべきである．

よく知っていることだが，あらたまって聞かれると説明に困るものは数多い．「時（とき）」がよい例だが，他にもたとえば，「長さ」という概念を幼児に教える場面を想像してもらいたい．長さなる概念を直接幼児に伝えることは不可能だから，結局「より長い」とか

「より短い」という概念を実例とか実践を通して定着させてから，長さの測り方のほうを教えるのである．「長さ」という概念そのものについては，こういう実践行動を通じて幼児が自然に獲得するのを待ち，獲得されたころを見計らって「長さ」という言葉を使ってみせるのである．概念の伝達は，そのために周辺のことをいろいろ述べたりはするが，基本的には相手が獲得するのを待つものである以上，各ステップで少しずつ誤解がついてまわるのが普通である．

たとえば「長さ」「広さ」「体積」とかの幾何学的概念，「時間」「速さ」「力」「温度」とかの物理学的概念のようなものは，上のように計測のしかたから入って獲得するものである．

3.1　いろいろな「まっすぐ」

さて計測だけではすまない「まっすぐ」を問題にしよう．まず，我々はどのようにして「まっすぐ」という感覚を仕入れてきたのかを思いだしてみよう．

まるで心臓の鼓動がそのまま形に現れるかのようにいつでもリズム感覚で動いていた幼稚園時代．たぶんこの時代に「まっすぐ並ぶ」ということを覚えるのだと思う．

目で見てどのようなものが「まっすぐ」なのか言葉で説明したりはしないが，一列に並んで，自分のすぐ手前の人は見えるけどその手前の人は見えないように並ぶとまっすぐになるといったことで「まっすぐ」とはどういうことかを覚えるのだと思う．素朴なまっすぐは，ある方向から片目をつぶって見通したとき一点に見えることである．

これは，見え方，あるいは，光の進路をもってまっすぐの定義としているようなものである．つまり，

●光はまっすぐ進む 「何かに向かってまっすぐ歩く」という言葉は少し高級になると「目的に向かって一直線に進む」などという言い方になる．このときにはもう「まっすぐな線は最短コースだ」ということを意識している言い方である．

まっすぐな線を描くのは案外難しいのだが，大工さんが使う「墨つぼ」というのがある．これは墨を含んだ糸を板の上にピンと張って，その糸が板をたたくようにはじくと板の上に直線がきれいに引かれることを利用した昔からある道具で今でも使われている．

●ピンと張った糸はまっすぐだ 暗闇でも糸をピンと張ることはできるから，このまっすぐは見え方とは関係がない．しかし，最も身近で，手近なまっすぐには違いない．ピンと張った糸は最短コースでもある．

しかし，光を使うまっすぐと，糸をピンと張るまっすぐはいつでも同じものを表しているわけではない．水の中に突っ込んだ棒は折れ曲がって見えるし，蜃気楼(しんきろう)のような現象もある．この場合,「光は屈折する」と表現されていて糸をピンと張るまっすぐのほうが本当のまっすぐであるかのように表現されているが，物ごとはすべて相対的なのであるからどちらが本当のまっすぐかは基準によることである．

もう少し，数学的内容を持った「まっすぐ」にガリレオの慣性法則がある．

●力の働いていない物体は「等速直線運動」をする これは力の働いていない物体は等速でまっすぐ進むというものであるが，力というものが何者かわからなくても力の働いていないということを時の流れに身をまかせているだけの行動だとすると，それは等速直線運

動という概念になると言っているのである．

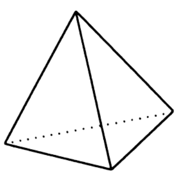
ガリレオの慣性法則によって，我々は「まっすぐ」という感覚的な言葉にかなりはっきりした数学的定義を与えることができるようになるのである．

“まっすぐ進む”という概念から時間を捨象すると直線の概念になるが，時間まで入れて“まっすぐ”を考えたのが，等速直線運動である．

3.1.1　剛体と初等幾何

時間の感覚は，目が見える見えないにかかわらず，だれでも持っている．その意味では時刻という感覚のほうが共通性が高いのだろうが，時刻の計測は難しかった[2]ので，歴史的には身近にある剛体のような，時空を超えて安定して存在するものを共通の仲立ちとして距離とか長さにまつわるものが先に共通精密言語化された．

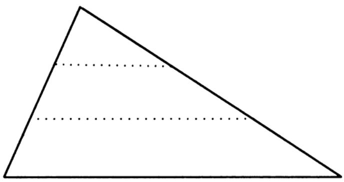
剛体というのは，石とか鉄の塊のような感覚的に硬くて変形しない物体のことだが，時間的にも変形しないで安定して存在し続けるものをさす．直観的には鉄の塊でできた4面体といったものを考えればよい．平行移動，回転移動で重ねられる場合に合同とよぶが，実際の移動を考えるのではなく，時間を捨象した仮想的な移動を考えるので，鏡像の関係にあっても合同とよぶことになる．直線，線分，3角形，直角といったおなじみの言葉で3角形の合同条件などを考える．これが初等幾何学である．時間的に安定した共通の存在を仲立ちとして概念が構成さ



2）振子時計が発明される以前には安定した時刻の計測は難しかった．

れているから，ここで展開されるものは極めて伝達性が高い．

●線分は延長できる　線分は平行移動のずらしでどこまでも直線として延長できる．線分も剛体だと考え，基準になる線分を**物差し**として用意しその任意倍数の線分，平行線を用いるとその有理数倍の線分などが作れ，これをもとに「長さ」を数値化することができる．実際に長さを測る場面を想像してみれば，この作業にもなにがしかの時間がかかるのだから，どんどん変化するものの長さは考えにくいだろうし，仮想的に長さを測っているときには，時間は忘れられてしまう．



しかし，本当は長さも光と時間で測るのである．数学辞典によれば，国際単位系では「長さ」というのも時間と光を使って定義されており「1 mとは，1秒の 299792485 分の1の間に光が真空中を伝わる距離」となっている．この場合真空の数学的定義は不明である．

さらに国際単位系での1秒の定義はセシウム原子の基底状態の二つの超微細準位の遷移の際に放出される電磁波が 9192631770 回振動する時間のことである．面倒な定義にみえるかもしれないが，宇宙にあまねく存在し，あまり他の影響を受けにくいものを基準にしたもので，自然界にあるものが**同じことを何回繰り返したか**で時間を計測していることになっていることがわかる．しかし，このとき，セシウム原子はどういう“時の流れ”に乗っているのだろうか？

いずれにしろ，長さを言うためには光と時間が必要なのである．そして，ニュートン (I. Newton, 1642–1727) の絶対時間は「真の数学的時間はそれ自体その本性からして外界のいかなるものとも関係せず

均一に流れる」ものとされている．

3.1.2　合同群，ガリレイ群

初等幾何学を離れて，もう少し個々人のレベルで考えてみると，何かを認識するために個人が身の内に持たねばならないものは，何をもって同じと考えるかという，同値関係を持ち込むための戦略 (strategy) である．これを持っていないと同値関係が "なまくら" になってしまうからである．その戦略を与えるのが数学でいう「群」なのである．個人は積極的にこれを持たないかぎり安定した同値関係は設定できないのである．

群の概念は数学では図形のような対象の「対称性を記述する言語」として説明されることが多いが，次元が無限大であるような大きい群の構造は論理的思考，特に同値関係の設定において必ず現れると言われている[3)]．

ある集合の任意の二つの元 g, h に対して合成 gh が定義されており，任意の三つの元 g, h, k に対して**結合律**と称する $g(hk) = (gh)k$ が成立し，**単位元**と称する元 e があって，これは g に対して $ge = eg = g$ となり，さらに任意の g に対して逆元と称する g^{-1} があって，$gg^{-1} = g^{-1}g = e$ となるとき，そのような合成演算を持った集合を数学では**群**とよんでいる．

●群論の用語　群は幾何学的対象の対称性を記述する基本的概念と考えられてきた．こう考えても群が数学のいたるところに現れるのは当然であるが，実は群は動作，行動のような時間概念を伴うもの

3) これについては後のほうの §11.2 参照．

を論理的に考えるときにも基本的役割を果たすのである．これは群の元を“打ち消しの効く行動”と考えるからである[4]．

G の部分集合 H が，G の**部分群**であるとは H が G での演算に関して閉じている場合，つまり次の (1), (2) がみたされる場合をいう：

(1)　H の元 h_1, h_2 に対し，G の中での合成 h_1h_2 も H の元，

(2)　任意の $h \in H$ に対し，$h^{-1} \in H$．特に $1 \in H$.

また，(1) のみ成立している H を，G の**部分半群**とよぶ．

初めに言葉あり，言葉は神なりき．

●言語群 $\mathbb{G}$　言葉というものは，いつでもどこでも使えるから便利なのである．実際の行動はつねに時空の中でおこなわれるものであるのに対し，言葉のほうはいわば時空をとび越して同一視されてしまっているわけで，このことが，言葉が伝達力を持つ理由なのである．**言語化することは，最低限，時空を超えた同一視を要求するのである**．この同一視の基準を $\mathbb{G}$ という記号で与えておこう[5]．個人が（時空を超えた同一視をおこなって）言葉を作るために戦略として用意しなければならないものを**言語群**とよんでおこう．$\mathbb{G}$ は物理的にみて何と思えばよいかを気にする人もいるだろうが，$\mathbb{G}$ によって言語化されて初めて物理が考えられるのであるから, $\mathbb{G}$ は物理以前のものである．

言語群 $\mathbb{G}$ は個人依存のものであり，個人はこれを使って行動を言語化しているのだが，違う言語群 $\mathbb{G}'$ による言語と対話不可能というわけではない．互いの論理構造が同型かどうかは対話の対象にな

4)　数学の教科書でこの観点から群論が述べられているものはほとんどない．

5)　これが何であるか数学的には述べきれない．

るのである．しかし，それらが同じものであるかどうかは別問題である．

ガリレオ (G. Galilei, 1564–1642) がピサの斜塔でおこなった落体の実験は違う言語群を持っているかもしれない二人でも，どうすれば同じものかどうか見分けられるかを示すものであった．ことは簡単で，$\mathbb{G}$ にも $\mathbb{G}'$ にも同じものと見える共通のもの（大自然がおこなうもの）を眼前に持ち出して，それが $\mathbb{G}$，$\mathbb{G}'$ にとってどう見えるかを述べあうことによって共通のものに対する対話可能な言語が作れるということ（実験の重要性）を示したのである．お互いに共通のものについて互いにどう見えるかを論ずればいいのである．

●対話可能性　初等幾何学が，光と剛体が共通ならば時間を捨象して，互いに誤解なく理解しあえるもの（共通の真理）であるように，ガリレオの慣性法則，ニュートンの運動法則は一方から見て，他方が等速直線運動（慣性運動，惰性運動）しているように見える観測者どうしなら誤解なく理解しあえる共通の真理である．

数学的に言えば，一方が記述した運動は他方には（時間の入った）１次式で変換されるので，２階微分である加速度は変わらないからである．この変換を**ガリレイ変換**とよぶ．互いに動いている観測者どうしの対話を考えているので，時間も入っているが時間の計り方は共通としている．つまり，時の流れ方はみな同じであると考えている．

3.2 束縛運動

あるとき，私の研究室に一人の見たことのない学生が入ってきて，いきなり

「先生，４次元の世界って本当にあるんですか！」

語勢からすると，僕に抗議しているような口ぶりである．

「いやあ，あるといえばあるのだけど･･･」

「だったら，見えるんじゃないですか．体の中だって，脳の深い所だって･･･」

どうも話がおかしい．「現実に存在しているかってこと？？」となるべく低音で聞くと，

「そう，数学の本によく４次元の世界の話が書いてあるので･･･」

少し落ち着いてきた．どうも様子がおかしいので「君，どうかしたの？」と聞くと．

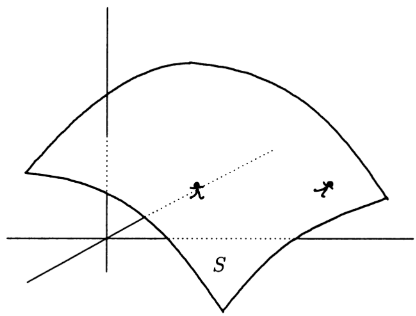
「親父が先週，脳溢血で死にました･･･」

と言ったかと思ったら，勝手に部屋を出て行ってしまった．

結局，彼が僕に何を言いたかったのかは想像するしかなかったが，３次元世界から飛び出したもう１次元を使って，親父さんの脳の出血部分に直接達して出血を止めてやれなかった，自分がもどかしかったのだろうと思った．

上の話は３次元に棲む我々が想像する４次元の世界だが，今度は立場を変えて，次の図のような曲面片 S に棲みついた曲面人を考えよう．にとっては S が宇宙であり，S から出ることはできないものとする．にとっての宇宙の外側にいる我々からはの頭の中も見ることはできるが，彼らにそんなことはできない．曲面片 S

をもう少し数学的に表しておこう.



$\mathbb{R}^3$ の原点を固定し，点の座標 (x, y, z) をまとめてベクトル $\boldsymbol{r}$ として表す．つまり，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ である．ベクトルは「平行移動でどこに持っていっても同じものと考える矢印」のことだと普通は教わるだろうが，ここではそのような「変位」を表すためではなく，位置を表すために使うので，始点は原点に固定したものを考える．これを**位置ベクトル**とよぶ.

3.2.1　空間曲線，曲面片

ひとつのパラメーター t で位置ベクトルが動かされてできる図形を（空間）曲線とよび，$C = \{\boldsymbol{r}(t); 0 \leq t \leq 1\}$ のように書く.

以下この本では特に断らないかぎり，扱う関数はすべて好きな回数だけ微分できる（これを C^∞-級とよぶ）ものとする.

$\boldsymbol{r}(t)$ のようなベクトル値関数の微分というと難しそうにみえるが，成分ごとの微分である：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}z(t)\right).$$

空間曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ のパラメーター t が時間を表している場合には微分 $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)$ は時刻 t での瞬間速度ベクトルを表すから，これを $\boldsymbol{v}(t)$ と書く．このベクトルの大きさを $\|\boldsymbol{v}(t)\|$ と表し，**速度**とよぶ．$\|\boldsymbol{v}(t)\|^2$ は内積を使って $\|\boldsymbol{v}(t)\|^2 = \langle \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle$ で計算される．

二つの空間ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の内積は

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \quad (= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \tag{1}$$

である．時間が 0 から t まで変化したときに点が動いた道のりは $s(t) = \int_0^t \|\boldsymbol{v}(t')\| dt'$ で与えられる．これは点が t によって同じ所を行ったり来たりしないで，つねに一方向きに進むものとしておけば曲線の長さのことである．

空間曲線を，時間を捨象してその形だけに注目したい場合には曲線を表すパラメーターとしては時間を使わず，**弧長パラメーター** s を使う．これは，同じ曲線でもそれを表すパラメーターの取り方がいろいろあるので，いつも速度が 1 であるような動きを使って曲線を表すことにするのである．

別の言葉で言えば「時間は棚上げして，形だけを見よう」としているのである．よく考えてみると，これは時間で変化したりしないものが「形」というものであるという「主張」もさりげなく言外に含んでいるのだが，これは正しい態度であろうか？　音楽を愛する人たちは納得するのだろうか？　「時間」って何なのだろうか？

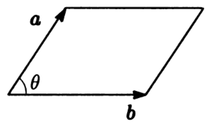
位置ベクトルが二つのパラメーター (u^1, u^2) で動かされてできる図形を**曲面片**とよぶ．この場合，曲面という 2 次元図形をイメージしているのだから $\dfrac{\partial}{\partial u^1}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$, $\dfrac{\partial}{\partial u^2}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ [6] がどこでも一次独立だとい

---

[6] $(u^1, u^2) = \boldsymbol{u}$ としている．

う仮定は暗黙のうちに入っている.

S の点 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ での接平面とは接ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}(\boldsymbol{u})$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}(\boldsymbol{u})$ で張られる平面であり，法線ベクトルとは接平面に垂直な（直交する）ベクトルのことである．垂直ということは内積を使って式で表現され，内積が 0 のとき直交しているという．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角度を θ とすると



$$\begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \\ \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle & \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \end{vmatrix} = \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = (\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \sin \theta)^2 \qquad (2)$$

だから，右辺は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行 4 辺形の面積の 2 乗であり，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が一次独立ということと (2) が正ということが同値となる.

曲線が曲面に**束縛されている**ということは位置ベクトルの終点がいつも S の点となるようになっているということだが，それを曲面を作っているパラメーターが t で動かされ，その結果位置ベクトルはいつも S に束縛されているのだと考える：

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(u^1(t), u^2(t)).$$

この部分もうるさく言い始めると，陰関数定理を持ち出して「埋め込み」「はめ込み」「沈め込み」などなど，いろいろ言うべきことはあるのだが，それらはすべて自分に正直に考えれば自然に獲得できるものばかりだから，ここではうるさいことは言わない.

3.2.2　ニュートンの運動法則

ガリレオの慣性法則がいちばん数学にしやすいから，まずそこから考えよう．空間を $\mathbb{R}^3$，時間を $\mathbb{R}$ だと断定してしまうと，ガリレオ

が言う「等速直線運動」はベクトルで表現でき，$\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{a}$ と書かれる．

これは個々の等速直線運動だから，「等速直線運動なるもの」を表示したければ，上で任意に入っている $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}$ を消してしまえばよいのだから，２回微分して，

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{0}$$

とする．左辺を $\boldsymbol{\alpha}$ と書いて**加速度ベクトル**とよぶ．

これが，力の働いていない物体の運動だというのだから，力というものが何のことかわからなくても，ともかく加速度ベクトルが $\boldsymbol{0}$ でない運動を見たら，それにはなにか力というものが働いていると考えなければならない．そこで加速度ベクトルと力のベクトル $\boldsymbol{F}$ の関係を想像するわけだが，真っ先に思いつくのは両者が比例しているという関係

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{\alpha}$$

であろう．比例定数 m は**慣性質量**とよばれる定数だが，以後この本では m は積極的役目は負わない．

話は少し飛ぶが，曲面片 S に棲みつき，S が宇宙で S の外側などは意味を持たないにとって「力の働いていない物体の運動」とはどんなものなのかを外側から考えてみよう．想像をめぐらしてと対話してみようというわけである．

なんの手がかりもなければ考えられないから，外側の空間では普通の運動の法則が成立しているとしよう．

束縛力とは曲面に垂直な方向から働く力で，曲面人にとっては力が働いていないとしか思えないような力のことである．

束縛運動とは束縛力のみ受けて，S に束縛されている運動のこと

である．つまり，加速度 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u}(t))=\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(t))$ がつねに S に垂直なベクトルとなるような運動のことである．

そこで，$\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(t))$ を計算しよう．合成関数の微分の規則は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(t))=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}(t))\frac{du^i(t)}{dt}$$

だが，これと関数の積の微分の公式を知っておれば

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(t))=\sum_{i=1}^{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}(t))\frac{du^i(t)}{dt}\right)$$

は計算できる．まず $i=1,2$ について $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}(t))\dfrac{du^i(t)}{dt}\right)$ を計算する．積の微分の公式より

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}(t))\right)\frac{du^i(t)}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}(t))\frac{d}{dt}\frac{du^i(t)}{dt}$$

だから，第 1 項に再び合成関数の微分の公式を使って

$$\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial u^j}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}(t))\frac{du^j(t)}{dt}\right)\frac{du^i(t)}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}(t))\frac{d^2u^i(t)}{dt^2}$$

この場合，偏微分されている $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}(t))$ が $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(t))$ と同種のものだということに気がつかないととまどうことになる．全部あわせると

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(t))=$$
$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^j\partial u^i}(\boldsymbol{u}(t))\frac{du^j(t)}{dt}\frac{du^i(t)}{dt}+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^k}(\boldsymbol{u}(t))\frac{d^2u^k(t)}{dt^2}$$

であるが，和の取り方の順序を指定している括弧 ( ) は（和はどこからやっても同じだから）取り払われている．さらに，これに注意すれば $\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}$ は $\sum\limits_{i,j=1}^{2}$ と書いて「(i,j) を独立に 1 から 2 まで動か

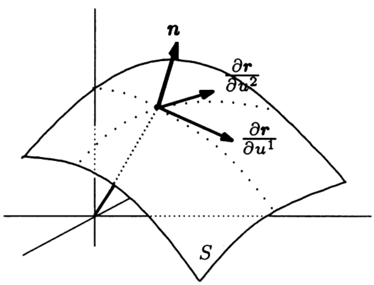
して総和する」意味としてよいだろう．さらに，総和記号の下に書く文字は適宜重複のないように入れかえて使うことにする．

結局，S に束縛されて動いている $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(t))$ の加速度は

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u}(t)) = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^j \partial u^i}(\boldsymbol{u}(t)) \frac{du^j(t)}{dt}\frac{du^i(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^k}(\boldsymbol{u}(t)) \frac{d^2u^k(t)}{dt^2}$$

と計算された．これが各点で S に垂直でなければならない．

●接平面成分，法成分への分解　そこで，$\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^j \partial u^i}(\boldsymbol{u})$ を接ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}(\boldsymbol{u})$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}(\boldsymbol{u})$ と法線ベクトルの成分に分解して



$$\sum_{k} \Gamma^k_{ji}(\boldsymbol{u}) \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^k}(\boldsymbol{u}) + h_{ij}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u})$$

と書く．無論にとっては法成分なんて何のことか理解を超えているものである．しかし，とりあえずこれまでに束縛運動についてわかった式を接平面成分，法成分に分けて書くと，

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \left(\frac{d^2u^k(t)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma^k_{ij}(\boldsymbol{u}(t)) \frac{du^i(t)}{dt}\frac{du^j(t)}{dt} \right) \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^k} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}(\boldsymbol{u}) \frac{du^i(t)}{dt}\frac{du^j(t)}{dt} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) = \lambda(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) \end{cases} \tag{3}$$

となる．第２式はこれが法線方向だといっているだけの式で $\lambda = \lambda(\boldsymbol{u})$ は「なにか関数である」というくらいの意味である．にとっては意味不明のものだが，外から見ている我々には曲面が平面からどのようにずれているのかを測っている量だということがわかるだろう．

しかし，第１式のほうも加速度の接平面成分だとはいえ，外から見た位置ベクトルの微分で定義されているのだから，このままでは，

にとっては意味不明，または計算不能のものであろう．しかし，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}$ は一次独立だから第 1 式は各成分が 0 であるべき式であり，

$$\frac{d^2u^k(t)}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k(\boldsymbol{u}(t))\frac{du^i(t)}{dt}\frac{du^j(t)}{dt}=0, \quad k=1,\ 2$$

という連立の式であることがわかる．これで見かけ上は位置ベクトルの入らない式ができてはいるが，$\Gamma_{ij}^k(\boldsymbol{u}(t))$ の部分が問題である．

3.2.3　線素，クリストッフェル記号

$(u^1(t), u^2(t))$ のほうは曲面の位置を表しているのだから，にもわかるはずだと考えると，$\Gamma_{ij}^k(\boldsymbol{u})$ をにわかるように書けばよいことになるが，その手がかりは，も「曲線の長さ」というものが測れるだろうということである．

そこで，S 上に描かれた曲線 $C(t)=(u^1(t), u^2(t))$, $0 \le t \le 1$, は外から見ておれば空間曲線で $C(t)=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(t))$ であるが，その長さは「外から見ている我々にも，にも同じである」と仮定する．

空間曲線 $C=\boldsymbol{r}(t)$, $0 \le t \le 1$, の長さは

$$\ell(C)=\int_0^1\left\|\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)\right\|dt$$

であるが，$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(t))$ であるから，合成関数の微分の公式と内積の公式で

$$\left\|\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(t))\right\|^2=\sum_{i,j=1}^{2}\left\langle\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^j}\right\rangle\frac{du^i(t)}{dt}\frac{du^j(t)}{dt}$$

である．記号を簡単にするために

$$g_{ij}(\boldsymbol{u})=\left\langle\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^j}\right\rangle, \quad \frac{du^i(t)}{dt}=\dot{u}^i(t)$$

などと書くと，空間曲線としての $C(t)$ の長さは

$$\ell(C) = \int_0^1 \sqrt{\sum g_{ij}(\boldsymbol{u}(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)}\, dt$$

となる.（式を美しく見せるために総和記号の下付きの文字等は省略してある.） 曲線 C に対しても上と同じ数値を「C の長さ」と言うはずであるというのが仮定であるが，S 上に描かれた任意の（連続微分可能な）曲線に対してが「その長さ」というものを知ることができるのだとすると，上の計算公式の中の $g_{ij}(\boldsymbol{u})$ の部分をが知っているとしなければならない．そこで，$(ds)^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(\boldsymbol{u})du^i du^j$ と書いて，ds を**線素**，$(ds)^2$ を第 1 基本量とか，**計量テンソル**とよぶ．この場合 du^i のようなものは微小/無限小の量で du^i/dt のように別の微小量との比を考えたときのみ意味を持つものである.

線素 ds は曲線の長さを測るための**物差し**（メートル原器）と考えるものであるが,「どこにでも持っていける」という運動，移動感覚を基礎にした言い方はできないから，その代わりとしてどこにでも持っていけるということを,「すべての場所，すべての方向で与えられている物差し」という時間概念を含まない「静的」なものに置き換えて表現したのである．しかし，これを全く同じことだと思ってよいかどうかは，因果関係を論理関係に置き換えるときと同様に，深く考えるべきことである．物の移動は必ず「時の流れ」のなかでおこなわれるのだが，上の静的述べ方では時間が完全に無視されている.

ともあれ，$g_{ij}(\boldsymbol{u}) = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^j} \right\rangle$ の部分をが知っているものとして，これを使って $\Gamma_{ij}^k(\boldsymbol{u})$ を書くことを考えよう.

上の式を微分すると次のようになる：

$$\frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} = \frac{\partial}{\partial u^k}\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^k \partial u^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^k \partial u^j} \right\rangle.$$

接平面成分，法成分への分解，第 1 基本量の定義を考えると

$$\frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} = \sum_\ell \Gamma^\ell_{ki}(\boldsymbol{u}) g_{\ell j} + \sum_\ell g_{i\ell} \Gamma^\ell_{kj}(\boldsymbol{u})$$

となる．この式は一つの式のように見えるかもしれないが，$g_{ij} = g_{ji}$，$\Gamma^\ell_{ki} = \Gamma^\ell_{ik}$ などに注意し，添字をいろいろ動かすと 6 個の式が書かれていることがわかる．添字を $i \to j \to k \to i$ と順送りに入れかえた式を書くと

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} &= \sum_\ell g_{j\ell} \Gamma^\ell_{ki}(\boldsymbol{u}) + \sum_\ell g_{i\ell} \Gamma^\ell_{kj}(\boldsymbol{u}) && +) \\
\frac{\partial}{\partial u^i} g_{jk} &= \sum_\ell g_{k\ell} \Gamma^\ell_{ij}(\boldsymbol{u}) + \sum_\ell g_{j\ell} \Gamma^\ell_{ik}(\boldsymbol{u}) && +) \\
\frac{\partial}{\partial u^j} g_{ki} &= \sum_\ell g_{i\ell} \Gamma^\ell_{jk}(\boldsymbol{u}) + \sum_\ell g_{k\ell} \Gamma^\ell_{ji}(\boldsymbol{u}) && -)
\end{aligned}$$

となるが，右端の符号にあわせて和をとると各 i, j, k で

$$\frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} + \frac{\partial}{\partial u^i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial u^j} g_{ki} = 2 \sum_\ell g_{j\ell} \Gamma^\ell_{ki}$$

であることがわかる．ここから Γ^ℓ_{ki} を求めるには行列 (g_{ij}) に逆行列があるので，それを (g^{ij}) と書くと $\sum_j g^{mj} g_{j\ell} = \delta^m_\ell$ であり

$$\sum_{j=1}^{2} g^{mj} \Big(\sum_\ell g_{j\ell} \Gamma^\ell_{ki} \Big) = \sum_\ell \Big(\sum_j g^{mj} g_{j\ell} \Big) \Gamma^\ell_{ki} = \Gamma^m_{ki}$$

となることを使って

$$\Gamma^m_{ki} = \frac{1}{2} \sum_j g^{mj} \Big(\frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} + \frac{\partial}{\partial u^i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial u^j} g_{ki} \Big)$$

となることがわかるので右辺を $\left\{ \begin{matrix} m \\ ki \end{matrix} \right\}$ と略記し，これを**クリストッフェル記号**とよぶ．これは，が g_{ij} と微積分を知っておれば計算

可能な式であるから，束縛運動の方程式はにとっては

$$\frac{d^2u^k(t)}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{2}\left\{{k \atop ij}\right\}(\boldsymbol{u}(t))\frac{du^i(t)}{dt}\frac{du^j(t)}{dt}=0,\quad k=1,\ 2 \qquad (4)$$

という連立の微分方程式であることがわかる．これを**測地線の方程式**とよび，解を**測地線**とよぶ．

●解は等速である　上の式 (4) がにとっては力の働いていない物体の運動がみたすべき式だというのだが，ガリレオの慣性法則はそのようなものは等速直線運動（等速でまっすぐ進む運動）であるとされている．では (4) の解は等速であろうか？ これは計算で確かめられる．つまり $(u^1(t),u^2(t))$ が上の式をみたせば

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\sum g_{ij}(\boldsymbol{u}(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)}=0$$

が成立するのである．これを確かめるのはこれまで述べてきた計算がわかっているならば難しいことではないので，読者の演習問題としよう．

解は等速であるのだから，上の式はにとっては（ガリレオの意味での）直線のみたすべき式だということになる．

3.2.4　曲面人にとって加速度とは？

これがにとっては力の働いていない物体の運動を表す式なのだとすると，この式は同時ににとっては加速度 0 の式でなければなるまい．そこで，上の式が 加速度＝0 という式に見えるように加速度なるものを定義してみよう．

●速度ベクトル　まず，は速度ベクトルをどのように見ているか考えよう．曲面片を外側から見ている我々にとっては速度ベクト

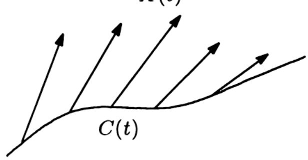
ルは位置ベクトルの時間微分だから $\boldsymbol{v} = \sum_i \frac{du^i}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}(t))$ である．しかしには位置ベクトル $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(t))$ は意味不明のものである．

そこで形式的に $\boldsymbol{r}$ を消して，$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = \sum_i \frac{du^i}{dt}\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_{\boldsymbol{u}(t)}$ と書いたときこれがにはどのように見えるか考えよう．左辺は単に“微分した”ことを示す記号として右辺の意味を考えると，には任意の関数 $f(\boldsymbol{u})$ に対して $f(\boldsymbol{u}) \to \sum_i \frac{du^i(t)}{dt}\frac{\partial f}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}(t))$ という写像だと思える．つまり，点 $P=(u^1,u^2)$ における S の接ベクトルとは $\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_P$ と書かれるもので S 上の C^∞-級関数全体から $\mathbb{R}$ への線形写像

$$f \to \sum_i X^i \frac{\partial f}{\partial u^i}(P) \quad (X^1, X^2 \text{ は実数})$$

のことだと定義する．速度ベクトルは $X^i = \frac{du^i(t)}{dt}$ であるような接ベクトルのことだとするのである．

●加速度ベクトル　速度ベクトルの微分が加速度ベクトルであるべきだから，微分をどのように定義すれば (4) 式がでるかを考える．



曲線 $C(t) = (u^1(t), u^2(t))$ に沿って接ベクトルが $\sum_i X^i(t)\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_{C(t)}$ のように与えられているとき“微分”なるものを

$$\frac{\nabla}{dt}\Big(\sum_i X^i(t)\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_{C(t)}\Big)$$
$$= \sum_i \frac{dX^i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_{C(t)} + \sum_i X^i(t)\frac{\nabla}{dt}\Big(\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_{C(t)}\Big),$$

$$\frac{\nabla}{dt}\Big(\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_{C(t)}\Big) = \sum_{k,m}\begin{Bmatrix} m \\ ik \end{Bmatrix}(\boldsymbol{u}(t))\frac{du^k(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial u^m}\Big|_{C(t)}$$

と定義する．この微分のしかたを**共変微分**とよぶ．微分するパラメーター t を省略して，

$$\left(\nabla\frac{\partial}{\partial u^i}\right)\Bigg|_p=\sum_m\begin{Bmatrix}m\\ik\end{Bmatrix}(p)du^k\frac{\partial}{\partial u^m}\Bigg|_p$$

と書いておくと便利である．一般のベクトル場 $X(\boldsymbol{u})=\sum_i X^i(\boldsymbol{u})\frac{\partial}{\partial u^i}$ に対しては

$$\nabla X=\sum_{i,k}\frac{\partial X^i(\boldsymbol{u})}{\partial u^k}du^k\frac{\partial}{\partial u^i}+\sum_i X^i(\boldsymbol{u})\nabla\frac{\partial}{\partial u^i}$$

とするのである．これを**共変全微分**という．

$$\frac{\nabla}{dt}\left(\sum_i X^i(t)\frac{\partial}{\partial u^i}\Bigg|_{C(t)}\right)=0$$

のとき，$\sum_i X^i(t)\ \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_{C(t)}$ は曲線 $C(t)$ に沿って**平行**だという．

こうすると，(4) 式は

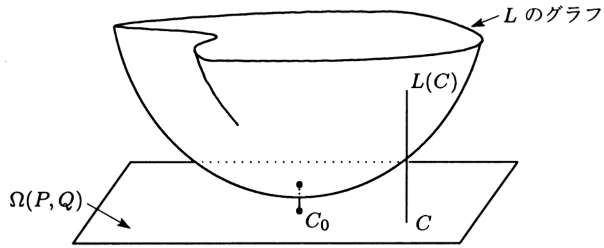
$$\frac{\nabla}{dt}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t))=\boldsymbol{0}$$

となることが計算で確かめられる．積の微分公式を拡大解釈して定義しているだけだが，このような些細（ささい）な変更で，「直線分は平行移動でどこまでも延長できる」といったような直線が持つべき性質についても発言できるようになるし，任意の閉曲線に沿って接ベクトルを平行移動したときどうなるかなど，空間そのものが持つ性質（曲率）についても発言できるようになる．また，ニュートンの運動方程式にあたるものも考えられるようになる．

3.3 最短コース

しかし，蜃気楼に見られるように素朴な直線概念がみな同じだったわけではない．果たしてガリレオのまっすぐは最短コースとしてのまっすぐなのであろうか？ これを次に問題にしよう．

関数 $y=x^2+2x+3$ が最小となる点を求めよ．この問題には（たてまえとしては）高校生が答えを書けることになっている．微分が 0 となっているはずだから $2x+2=0$ の点を探して $x=-1$ が正解で，このことの理由が（受験対策的でなく）**本当に**わかっているなら次節の (5) 式も，同じ考え方で受け入れられるはずである．



2 点 P, Q を結ぶ曲線全体の集合を $\Omega(P,Q)$ とし，写像 $L:\Omega(P,Q) \to \mathbb{R}_+$ を各曲線にその長さを対応させる写像とする．さらに P, Q を結ぶ最短コースが曲面片 S の上に描けるものと（常識的に）仮定してそれを $C_0(t)=(u_0^1(t),u_0^2(t))$ とする．

3.3.1 微分と積分の順序交換，部分積分

P, Q を結ぶ曲線がパラメーター s 付きで与えられているとしてそれを $C_s(t)$ としよう．$C_s(0)=P$, $C_s(1)=Q$ とする．

$$C_s(t)=(u_s^1(t),u_s^2(t)),\quad 0\le t\le 1,\quad -\varepsilon<s<\varepsilon$$

である．パラメーター s に関する微分可能性も無論仮定する．この場合 (t,s) 2変数の関数としての微分可能性も仮定するので，$C_s(t)$ は $C(t,s)=(u^1(t,s),u^2(t,s))$ のように書いておくほうがよいだろう．

曲線 $C(\cdot,s)$ の長さは

$$L(C(s))=\int_0^1\sqrt{\sum g_{ij}(\boldsymbol{u}(t,s))\dot{u}^i(t,s)\dot{u}^j(t,s)}\,dt$$

で与えられ，

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\int_0^1\sqrt{\sum g_{ij}(\boldsymbol{u}(t,s))\dot{u}^i(t,s)\dot{u}^j(t,s)}\,dt=0 \tag{5}$$

となる．領域 $[0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ で $u^i(t,s)$ が連続微分可能と仮定されているので，微分と積分の順序交換ができ

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\sqrt{\sum g_{ij}(\boldsymbol{u}_s(t))\dot{u}_s^i(t)\dot{u}_s^j(t)}\,dt\\&\quad=\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{V(t,s)}}\sum\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\big(g_{ij}(\boldsymbol{u}_s(t))\dot{u}_s^i(t)\dot{u}_s^j(t)\big)dt=0\end{aligned}$$

である．ただし，$V(t,s)$ は最初の被積分関数である．積の微分，合成関数の微分の公式で $\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\big(g_{ij}(\boldsymbol{u}_s(t))\dot{u}_s^i(t)\dot{u}_s^j(t)\big)$ を計算しよう．そのために

$$\frac{\partial}{\partial s}u_s^i(t)\Big|_{s=0}=v^i(t),\quad \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\dot{u}_s^i(t)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big|_{s=0}u_s^i(t)=\dot{v}^i(t)$$

とおく．すると



$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\big(g_{ij}(\boldsymbol{u}_s(t))\dot{u}_s^i(t)\dot{u}_s^j(t)\big)=$$

$$\sum_k\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(\boldsymbol{u}_0(t))v^k(t)\dot{u}_0^i(t)\dot{u}_0^j(t)+g_{ij}(\boldsymbol{u}_0(t))\big(\dot{u}_0^i(t)\dot{v}^j(t)+\dot{v}^i(t)\dot{u}_0^j(t)\big)$$

となるから，ここで，おなじみの部分積分を使う．部分積分の原理は積の微分の公式の応用で

$$\Big[fg\Big]_a^b = \int_a^b (fg)'dt = \int_a^b f'g\,dt + \int_a^b fg'dt$$

であり，これを使って $\dot{v}^i(t)$ を $v^i(t)$ に置き換える．このとき次のことに注意する．

●両端は固定されている　$u_s^i(0), u_s^i(1)$ は固定されているから $v^i(0)=0, v^i(1)=0$ であり，部分積分で $[\ ]_0^1$ の項は出ないで

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{V(t,0)}} g_{ij}(\boldsymbol{u}_0(t))\dot{u}_0^i(t)\dot{v}^j(t)dt$$
$$= -\int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2\sqrt{V(t,0)}} g_{ij}(\boldsymbol{u}_0(t))\dot{u}_0^i(t)\Big)v^j(t)\,dt$$

となる．しかし，このままでは $\sqrt{V(t,0)}$ も微分しなければならず，式が複雑になる．

●等速のパラメーター　そこで，時間を無視して曲線の形だけを考えることにし，曲線のパラメーターは等速のパラメーターを使うことにする．すると $\sqrt{V(t,0)}$ は定数となり，微分されない．

以上のことを全部あわせて整頓すると (5) 式の左辺は

$$= \frac{1}{2\sqrt{V(t,0)}} \int_0^1 \sum_k \Big(\sum \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(\boldsymbol{u}_0(t))\dot{u}_0^i(t)\dot{u}_0^j(t)$$
$$-2\frac{d}{dt}\Big(\sum_j g_{kj}(\boldsymbol{u}_0(t))\dot{u}_0^j(t)\Big)\Big)v^k(t)\,dt = 0$$



というかなり読み取りにくい式になる．しかし，この部分は古典的に力学というものを考えるときの本質的役割を負うものであるから，軽視しないでほしい．

3.3.2 変分学の基本補題

まず，上の式は $\int_0^1 \sum_k F_k(t)v^k(t)dt = 0$ の形をしているが，

$$v^k(t) = \frac{\partial}{\partial s}u^k(t,s)\Big|_{s=0}$$

は最短コースを揺らすときの，はじき出し方と考えるとよい．これは勝手に揺らすのだから，$v^k(t)$ **は任意である**．このことから**変分学の基本補題**とよばれる，$F_k(t) = 0$ が結論されるのである．

証明は，仮に $v^k(t) = F_k(t)$ とおけるとすると，$\int_0^1 \sum_k F_k^2(t)dt = 0$ であるが $F_k^2 > 0$ となる所があれば積分は 0 にならないからである．正しくは $v^k(t)$ は両端で 0 となるように選ばなければならないが，$F_k \neq 0$ となる所があると，その近くで $\sum_k F_k v^k > 0$，全体でも $\sum_k F_k v^k \geq 0$ となるようにでき，矛盾となるからである．

これより，各 k につき（符号を変えて）

$$-\sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(\boldsymbol{u}_0(t))\dot{u}_0^i(t)\dot{u}_0^j(t) + 2\frac{d}{dt}\Big(\sum_j g_{kj}(\boldsymbol{u}_0(t))\dot{u}_0^j(t)\Big) = 0$$

が得られた．この式の 2 項目を計算し総和記号の添字を整頓すると $\ddot{u}_0^i(t) = \frac{d^2}{dt^2}u^i(t)$ として

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i,j} \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}_0(t))\dot{u}_0^i(t)\dot{u}_0^j(t) + 2\sum_i g_{ki}(\boldsymbol{u}_0(t))\ddot{u}_0^i(t) \\
&= \sum_{i,j}\Big(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}_0(t)) + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}(\boldsymbol{u}_0(t))\Big)\dot{u}_0^i(t)\dot{u}_0^j(t) + 2\sum_i g_{ki}(\boldsymbol{u}_0(t))\ddot{u}_0^i(t)
\end{aligned}$$

となるから，$\begin{Bmatrix} m \\ ij \end{Bmatrix}$ の定義を書き出してみると，結局各 k で

$$
\begin{aligned}
&2\sum_k g_{ki}(\boldsymbol{u}_0(t))\ddot{u}_0^i(t)\\
&-\sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}_0(t))+\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}(\boldsymbol{u}_0(t))-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(\boldsymbol{u}_0(t))\right)\dot{u}_0^i(t)\dot{u}_0^j(t)\\
&=2\sum_j g_{km}(\boldsymbol{u}_0(t))\left(\ddot{u}_0^m(t)+\sum_{i,j}\begin{Bmatrix} m\\ ij\end{Bmatrix}(\boldsymbol{u}_0(t))\dot{u}_0^i(t)\dot{u}_0^j(t)\right)=0
\end{aligned}
$$

となるから，両辺に $g^{\ell k}$ を掛け，k で総和し，$\sum_k g^{\ell k}g_{km}=\delta^\ell_m$ を使うと (4) 式と全く同じものが得られることがわかる．

3.3.3　全能神の存在証明？

力の働いていない物体の運動（等速直線運動）と（等速のパラメーターを使い形だけを見るようにした）最短コースは一致した．これはある見方をすると驚くべきことなのである．

これまではひとつの曲面片で考え，外側は普通の 3 次元の空間（3 次元ユークリッド空間）として，そこではニュートンの運動法則が成立しているものとして束縛運動を考えたのだが，運動の方程式は長さの測り方さえ知っていれば外側を考えなくても書くことができ，しかもそれは時間を考えなければ最短コースがみたす式であった．

すると，ひょっとしてこそがこの宇宙から出ることのできない我々自身なのではあるまいかと思いめぐらすことができる．

●等速ということまで出るようにするには　微分方程式 (4) がでさえすれば，§3.2.3 末の演習問題でやったように等速ということがでるのだから，曲線の長さではなく，$\sqrt{\ }$ をやめてそのまま

$$
\int_0^1 \sum g_{ij}(\boldsymbol{u}(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)\ dt
$$

を最小にする曲線を考えればよいということがすぐわかるのだが，これはいったい何が最も小さくなるような曲線なのであろうか？ $\sum g_{ij}(\boldsymbol{u}(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)$ は速度ベクトルの大きさの２乗 $\|\boldsymbol{v}(t)\|^2$ である．質点の質量を m としたとき $\frac{1}{2}m\|\boldsymbol{v}\|^2$ は「運動エネルギー」と物理でよばれている量である．この積分が最小となるように力の働いていない物体は運動するというのである．

図形だけでなくそれを表示するパラメーターまできめるために，物理は運動エネルギーという幾何学にはない概念を持ち出すのである．

曲線の長さという概念は時間とは関係がないが，エネルギーは時間と深い関係があり，物理では時間とエネルギーは正準共役[7] とされているものである．

しかし，S 内の物体はどのようにして（自分が通ったこともない）最短コース，運動エネルギー最小のコースを知るのであろうか．S 内の物体にこのコースを教える者はだれであろうか？　このように言うと上のことは神秘的に聞こえてくる．

この神秘性を和らげる考え方は，現実の粒子は理想化された点粒子（質点）ではなく，なにがしかの広がりを持っていて，その各部分は自発的行動をしているが，我々が見ているのはその平均値であると考えるのである．

これにはなにがしかの時間感覚を取り込む必要があるのだが，この部分が極めて難しい．つまり，自然界にあまりにも普遍的に存在している「光」や「時間」をどのようにして理論の中に組み込むのか決定的考え方はまだ出ていないのである．

[7] ここでは，同じものの表裏の関係と言っておこう．

4

光にとってのまっすぐとは？

・・・ 続いて声あり「光よあれ！」．すると世界は明るくなった・・・

光はこの世の普遍的存在である．我々の素朴なまっすぐは（光を仲立ちにした）見え方できめている．しかし，光は最短コースを進むのではない，幾何光学の知識では，光は最短時間コースを進むのである．これが最短コースとしての直線と同じでないことは風呂に入って自分の手の見え方がどう変化するか，水中眼鏡で魚を見ていると，実際（正しくは陸に引き上げて見たときよりと言うべきだが）より大きく見えていることなどを体感した人ならみな知っていることである．何を「実際だ」と言うかはその人がどこを現実と思っているかによることである．

4.1　何も無いのが在る？

光の速さは「媒質中」では「真空中」より遅くなるとされている．では，光にとっての「まっすぐ」とはいったい何だろう？

しかし，媒質というのは感覚的にわかるとしてもこれはいったい何なのだろう？　物理学は多くの場合，物質を扱うのであるが，そ

の物理学においていちばん難しいのは「何もない」（光はあるのだから正確には質量が正のものがない）という概念である．上の述べ方から推察すれば，光が最も早く伝われる場所が真空だということになるが，このような理想的な真空がこの世にあるのかどうかは不明である[8)]．しかし「1 mとは，1秒の 299792485 分の 1 の間に光が真空中を伝わる距離」と定義されているから，光の速さには上限があることがわかる．この上限速度（真空中の光の速度）を c_0 と書くことにする．

一般の曲面は曲面片の寄せ集めである．しかも第1基本量さえ与えられておれば曲面の外側を考えなくてもその中の運動は考えられるものである．

感覚的に言えば，多様体 M とは互いが C^∞-級の座標変換で移りあう局所座標系（曲面片）の集団のことである．

正確な定義は他の教科書に譲るが，外側を考えなくても意味があるような定義にすることがポイントである．そのために

位置 $\Longleftrightarrow$ 座標変換を伴った局所座標の集団

接ベクトル $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}\right|_p \Longleftrightarrow \left.\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right|_p$ （微分演算子と考える）

$$g_{ij}(p) = \left\langle \left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}\right|_p, \left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^j}\right|_p \right\rangle \Longleftrightarrow \text{内積を与える対称行列 } g_{ij}(p)$$

のような対応で考える．第1基本量 $g_{ij}(p)$ は位置座標の関数として与えられているのだが，別の座標系に移ったとき

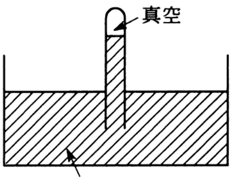
$$\sum_{i,j} \hat{g}_{ij}(\hat{\boldsymbol{u}}) d\hat{u}^i d\hat{u}^j = (ds)^2 = \sum_{k,l} g_{kl}(\boldsymbol{u}) du^k du^l$$

8) 最近の物理の話題では，宇宙空間にあまねく存在しているニュートリノにも質量があるらしい．

真空 vs 媒質

その昔，人々が鉄球内から空気を追い出して真空を作りだそうと努力していた時代があった．しかし，当時の真空ポンプでは内圧を下げるには相当の時間がかかり，一定の限界以下には気圧が下がらないように見えた．そこで，「自然は真空を嫌う」を法則として採用して気体論を作ろうとしていた時代があったという話を聞いたことがある．

これに対する有名な反証が水銀柱で作るいわゆる「トリチェリーの真空」で，今日では気圧を測るために広く使われているのだが，水銀といえども液体だから，確かに空気は入らず空白に見えている部分は水銀の「蒸気」で満たされていて完全な真空ではないといった話も聞いた覚えがある．しかしそうなると水銀柱を支えているガラス管の蒸気だって入っているはずである．



となるように変換されないと物差しの役目を果たさないから，上の公式で変換されるものと約束する．この変換性に注目したとき $\sum_{i,j} g_{ij}(\boldsymbol{u})du^i du^j$ を正定値の**2次の対称テンソル場**とよぶ．

どこにでも持っていける物差し $(ds)^2$ は局所座標系を使ってさまざまに表示されるのだが，座標系によらないで「長さ」という普遍的な意味を持つべきだからこのようにするのである．これらは感覚的には外側を消し去った曲面片の集団であるから，細部にこだわらず全体をイメージするようにするとよい．

物ごとを表現するときに使う言葉は各人各様だから，局所座標系は個人の言語系みたいなものである．すると共通のものについての対話を成立させるためには互いの座標変換でどのように移りあうかを知ることが重要なカギになる．

すると，多様体 M は個々人の集団ということになるが，ここで共通に理解しあえるもの，対話可能なものは何かという視点が大切である．この場合 M が点集合として意味を持つべきと考えるかどうかはかなり大きな違いとなるが，普通の多様体論ではまず位相空間としての点集合 M があると考えている．

●対称テンソル場　第 1 基本量は対称行列を用いて

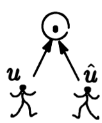
$$(ds)^2 = (du^1, \cdots, du^n)\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} du^1 \\ du^2 \\ \vdots \\ du^n \end{bmatrix} \qquad (g_{ij} = g_{ji})$$

と書かれるが，(行列記号は大きすぎるので) これを簡略に

$$(ds)^2 = {}^t(d\boldsymbol{u})G(\boldsymbol{u})(d\boldsymbol{u}), \quad {}^tG = G$$

のように書く．${}^t(\ )$ は転置行列を表す記号である．さらに座標変換を記述するために $T_i^k = \dfrac{\partial \hat{u}^k}{\partial u^i}$ とおいて

$$\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial \boldsymbol{u}}\right) = \begin{bmatrix} T_1^1 & T_1^2 & \cdots & T_1^n \\ T_2^1 & T_2^2 & \cdots & T_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_n^1 & T_n^2 & \cdots & T_n^n \end{bmatrix}$$



と表す．この記号の使い方で，前の $(ds)^2$ を書くと

$$(ds)^2 = {}^t(d\hat{\boldsymbol{u}})\hat{G}(\hat{\boldsymbol{u}})(d\hat{\boldsymbol{u}}) = {}^t(d\boldsymbol{u})\,{}^t\!\left(\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}}{\partial\boldsymbol{u}}\right)\hat{G}(\hat{\boldsymbol{u}})\left(\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}}{\partial\boldsymbol{u}}\right)(d\boldsymbol{u})$$

という式になるので，上と見比べて，第 1 基本量の変換公式として

$$G(\boldsymbol{u}) = {}^t\!\left(\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}}{\partial\boldsymbol{u}}\right)\hat{G}(\hat{\boldsymbol{u}})\left(\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}}{\partial\boldsymbol{u}}\right), \quad \hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}) \tag{6}$$

が得られる．$\hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})$ は $\hat{\boldsymbol{u}}$ が $\boldsymbol{u}$ の関数であることを表している．

この変換で移りあっておればひとつの曲線の長さが $\boldsymbol{u}$ と $\hat{\boldsymbol{u}}$ とで違う値になることはない．しかしここでも「伝えるために」時間は捨象されていて，時間は $\boldsymbol{u}$ と $\hat{\boldsymbol{u}}$ とで全く同一とされている．

●媒質　M なるリーマン多様体をなにか媒質がみたしているものとしよう．点 $\boldsymbol{u}$ ごとに媒質の性質が異なると光の速度も点ごとに違うことになるから，光の速度を $c(\boldsymbol{u})$ $(< c_0)$ とする．(簡単のためこれは C^∞-級関数とする.) 光が微小区間 ds を通過するに要する時間は $\dfrac{ds}{c(\boldsymbol{u})}$ だから，P から出て Q に到る曲線 C に沿って光が進むとき，Q に到達するのに要する時間は

$$T(C) = \int_0^1 \frac{1}{c(\boldsymbol{u}(t))}\frac{ds}{dt}\,dt = \int_0^1 \sqrt{\sum \frac{g_{ij}(\boldsymbol{u}(t))}{c(\boldsymbol{u}(t))^2}\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)}\,dt$$

である．式の形だけからみると第 1 基本量を

$$\sum g_{ij}du^i du^j \Longrightarrow \sum \tilde{g}_{ij}du^i du^j = \sum \frac{1}{c^2}g_{ij}du^i du^j$$

と変更しているだけである．となると媒質というものも数学的には第 1 基本量の中に組み込まれているものとなり，媒質があるかないかは,「時間」と「長さ」の関係をどのように考えているかの違いだけとなる．あらためて，媒質って何なのだろう？

これから最短時間コースの微分方程式を出すために前の計算を思いだすと，部分積分を使うところで $\tilde{g}_{ij}$ に関して“等速”に見えるパ

ラメーターを使って曲線を表すと計算が楽になることがわかる．つまり $\dfrac{1}{c(\boldsymbol{u}(t))}\dfrac{ds(\boldsymbol{u}(t))}{dt}=v$（$t$ に関して一定）となるようなパラメーター t を使うのであるが，t は時間ではなく単なるパラメーターで，所要時間は $\dfrac{1}{c(\boldsymbol{u}(t))}\dfrac{ds(\boldsymbol{u}(t))}{dt}$ のほうである．t を**等時間差パラメーター**とよぶ．

時間を問題にはしているが，ここでの時間はニュートンの絶対時間であり，外界のいかなるものとも関係せず均一に流れている．媒質があるために変化するのは第１基本量であるが，媒質が時間にも依存して変化している場合も考えられる．つまり，光を基準にしたときの物差しは「どこにでも持っていける一つのもの」という時間を捨象した述べ方にはなじまないものに変わる．第１基本量にあたるものは $\sum_{i,j}\tilde{g}_{ij}(t,\boldsymbol{u})du^i du^j$ のように t を含んで $(t,\boldsymbol{u})$ ごとに与えられるものであるが，すると，これはいったい何であろうか？

普遍的に存在しているものを机上に持ち出すのは難しい．我々の言語系そのものが，この普遍的な存在を基準にして（それにどの程度，共通理解が得られているものか反省なしに）組み立てられていることが多いからである．

● **(p,q)-不定値計量**　第１基本量として考える対称行列はベクトルの長さが正の値ででてくる行列（正定値行列）でなければならないが，この性質は座標変換で不変である．ところで，行列式が零でない一般の対称行列では (6) の形の座標変換で不変な性質として

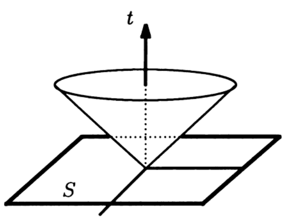
$$ {}^tT\hat{G}T=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix},\quad I_p=p\text{-次単位行列} $$

となるように変換したとき，(p,q) は変わらないということがある．このようなものを (p,q)-**不定値計量**とよぶ．不定値計量ではベクト

ルの“(長さ)^2”がいつも正となるのではなく，負とか零になってでてくるものもある．

4.2　光って何？

光の正体は電磁波である．普通の人体では感じることはできないが，検電器とか鉄片を小道具として検出できる電場とか磁場と称するベクトル場（空間のすべての点で与えられるベクトル）の**振動**である．このような振動を記述するには，小道具が個人依存ではないから，時間も座標関数の仲間に入れた「時空」を考えるほうがよい．簡単のため，時空を $\mathbb{R}^{1+3}$ とし，(t, x^1, x^2, x^3) を座標関数とする．t は時間座標，$\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ を空間座標とする．t は x^0 とも書く．このようなところでは，一点から出て四方八方に等速で広がるものは右の図のような錐面で表示される．光の場合，これを**光錐**という．



剛体という共通存在を仲立ちとして線素 ds を確立し，どの観測者とも会話が成立するように長さ（距離）を定義すると，ユークリッド幾何学（初等幾何学）ができ上がるように，共通存在としての「光（電磁場）」を仲立ちとし，上の光錐がどの観測者にとっても同じに見えるということ（光速不変）を原理として会話を成立させると，共通の時空を論ずる物理となる．これが特殊相対論である．

特殊相対論はマイケルソン - モーレイの実験を説明するために導入されたものと物理では解説されることが多いのだが，マイケルソ

ン - モーレイの実験だけから論理的に特殊相対論が導けるものではないのだから，数学的には，「光はその速度まで込めてすべての観測者にとって同じものである」という確信が先にあり，これを原理として採用したのが特殊相対論であると言うべきであろう．では，その確信はどこからきたのか，それは数学的理性による直観以外の何ものでもない．

「時」が意識的に幾何学の机上に乗ったのは相対論が最初であるが，しかし自然界には「時の流れ」などという一つのものは存在せず，共通の存在として認識されるのは第1基本量にあたるローレンツ計量のみであるというのである．ここではリーマン多様体の $(ds)^2$ に代わって，光錐をきめる**ローレンツ計量**とよばれるものが主役となる．

「時の流れ」は各人にとっては絶対唯一のものであっても同一の共通存在として認識されるものではない．強いて言えば，大自然の「時の流れ」は各点での未来錐のことであるが，水の流れのようなベクトル場のイメージでは捉えられないものである．

4.2.1 ローレンツ多様体

リーマン多様体は正定値の第1基本量が与えられた多様体だったが，時間や因果構造を考えるときにはローレンツ計量の入った多様体（ローレンツ多様体）を考える．多様体の次元を n とする．

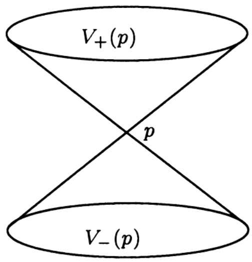
●**ローレンツ計量**　とは $(1, n-1)$-不定値計量のことである．ローレンツ計量は $(ds)^2$ にあたるところを（正定値ではないが）同様の記号で $(c_0 d\tau)^2$ と書くと

$$(c_0 d\tau)^2 = \sum_{i,j=0}^{3} g_{ij} dx^i dx^j, \quad (g_{ij}) = (1, n-1)\text{-不定値対称行列}$$

である．c_0 は真空中の光速とよばれる定数である[9]．ローレンツ計量の入った4次元多様体を**時空多様体**とよぶこともある．これを $\mathcal{M}$ と書いておく．

不定値計量ではあるが，ここから先は曲面片でやったのと全く同様にして測地線の方程式 (4)，共変微分などが定義される．しかし，何もかも同じというのではない．点 p での接空間 $T_p\mathcal{M}$ には，上の $(1, n-1)$-不定値計量を用いて内積

$$\langle X, Y\rangle_p = \sum_{i,j} g_{ij}X^iY^j, \quad X, Y \in T_p\mathcal{M}$$



が定義される．$\{X; \langle X, X\rangle > 0\}$ で定義される $T_p\mathcal{M}$ の部分集合 $V(p)$ を $T_p\mathcal{M}$ の**時間領域**とよぶ．これは $V_+(p)$, $V_-(p)$ の二つの部分に分かれている．$\{X; \langle X, X\rangle = 0\}$ で定義される $T_p\mathcal{M}$ の部分集合を光錐とよび，C_p と書く．接ベクトル $X \in T_p\mathcal{M}$ が C_p に属すると，この計量に関する“長さ”は 0 である．

● **null-曲線，null-測地線**　$\mathcal{M}$ 内の曲線/測地線で接ベクトルがいつも光錐に入るものを null-曲線/null-測地線とよぶ．このような曲線のこの不定値計量に関する“長さ”は 0 である．

●**時間的曲線**　$\mathcal{M}$ 内の区分的に滑らかな曲線 $c(t)$ で，いたるところ $\left\langle \frac{dc(t)}{dt}, \frac{dc(t)}{dt} \right\rangle_{c(t)} > 0$ となるものを時間的曲線とよぶ．

始めと終わりのない時間的曲線を**世界線**とよぶ[10]．

しかし，ローレンツ多様体だけでは，時間の前後がいえる構造が

9) しかし，自然界に絶対的な真空が実在しているとは考えないほうがよいだろうから，これは理論的に理想化された定数である．

10) この命名をだれがどのような感覚でおこなったのか私は知らない．

入らない．前後をいうためには，$\mathcal{M}$ 全体に半順序関係が定義されねばならない．

定義 4.1 時間的閉曲線が存在しないローレンツ多様体を因果構造のあるローレンツ多様体とよぶ．因果関係を扱う物理では時空は因果構造[11] のあるローレンツ多様体でなければならない．

$\mathcal{M}$ の点 p をひとつ固定し，$\mathcal{P}(p)$ を p と時間的曲線で結べる点の全体とする．初期方向が二つの部分に分かれているから，時間的閉曲線がないとすれば $\mathcal{P}(p)$ は共通部分のない $\mathcal{P}_+(p)$, $\mathcal{P}_-(p)$ に分かれている．そこで $\forall q \in \mathcal{P}_+(p)$ に対し $p \prec q$ とする．$\mathcal{P}_+(p) \cup \mathcal{P}_+(q)$ は曲線をつないで考えれば $\mathcal{P}_+(p) \cup \mathcal{P}_+(q) = \mathcal{P}_+(p)$ がわかるので，これより $\mathcal{M}$ 全体に半順序関係 $\prec$ が定義される．

光は振動する電磁場であり，電磁場は 2 次微分形式とよばれる

$$\omega = \sum_i E_i(t, \boldsymbol{x}) dx^i \wedge dt + \sum_{i,j} H_{ij}(t, \boldsymbol{x}) dx^i \wedge dx^j$$

のような形で書かれるものである．ここに出てくる t はもはや空間座標から独立したパラメーターではなく，空間座標と同格な座標関数である．電磁現象は大自然が時空多様体の中で個々人とは無関係におこなう行動である．これがみたす式はこれまでのように質点の運動方程式（常微分方程式）ではなく，「時空」として時間と空間座標を同列に扱ったところで書かれる連立偏微分方程式で記述されるものである．

ここでは変化/動いているのは $\mathcal{M}$ 上の関数/ベクトル場で，これは $\mathcal{M}$ 全体で定義されているものだから，「どこにあるか」（存在場

11）これはタイムマシンのようなものを禁止した構造である．

所）を特定して言うことができない性質のものである．池の表面が波立っているとき「波が池のどこにあるのか」という質問には答えにくいのと同じである．

波というものは回折現象を伴うが，波長が短くなるにつれて障害物の後ろに回りこみにくくなり，障害物の後ろにくっきり影が現れるようになる．こうして電磁波は波長が極端に短くなると「光線」とよべるような直進性を示すようになるが，これの数学的解析は難しくなりすぎるのでここでは省略する．

相対論では不定値計量をきめる共通の存在として光子 (photon) を想定し，この不定値計量が定める錐を光錐とよぶ．光子は現実の物理がいう電磁場としての photon ではなく，抽象化，理想化された質量 0 の粒子で，null-測地線をたどるものとされている．

ローレンツ計量のところにある τ は固有時 (proper time) とよばれていて，観測者の時計による時間とされているが，これが紛らわしい．この時間で光の速度を測れば，光子が null-測地線上をどこまで走っても $d\tau = 1$ にはなれないのだから，速度 ∞ である．

光の速度が有限で c_0 なのはセシウム原子にとっての時間で測るからである．光の速度を測るときにはそのセシウム原子に対して静止している位置に観測者はいなければならないが，あくまでセシウム原子の「時の刻み」を 1 単位として時間を考えるのであって，光子と一緒に動く時計（固有時）で計測しているのではない．

この場合，誤解される危険が少しあるが，観測者の時計による時間というのを「観測者の心理的絶対時間」とでも解釈しておくと感覚的にわかりやすい．

5

カラテオドリーの熱機関社会学

話は変わるが，光より少し前にその正体が解明されたものに「熱」という普遍的存在があった．今日では熱の正体は分子運動のようなブラウン運動する微小振動であると考えられているが,「熱素」という素粒子のようなものと考えられていた時代もあった．

古典熱力学は熱というものが正体不明の普遍的存在だった時代の「熱機関」を扱うものである．正体不明なものに挑むときの参考になるものだから，数学的に考えてみよう．

熱機関とはシリンダー内の体積や圧力の変化をピストンを通して動力として取り出す周期運動をする機械装置のことである．原型は炭鉱内の水を排出するポンプでピストンも極めてゆっくり動くものであるが，ピストン内には水蒸気だけあるのではなくさまざまな物質がさまざまな状態で入っているものを想定する．また，シリンダーもかなりたくさん連結されている個性あふれる壮大な機械仕掛けである．大量生産時代に入る前の 19 世紀の熱機関であるから，ひとつひとつ手作りで，整備士はひとつひとつの装置の癖まで知って整備する．ひとつの熱機関がひとつの閉じた小宇宙（多様体）を構成しているものと考える．

古典熱力学は特殊相対論の「光」と同じように，共通の存在として「熱」という概念を仲立ちとして熱の釣合いの状態（平衡状態）を扱うのだが，平衡状態を保ったまま変化する準静的変化[12)]という言葉の矛盾のような概念がでてくる．これは平衡状態に瞬時に到達してしまうか，あるいは変化が極めてゆっくりしている系でしか考えられないものである．したがって，変化のスピードが速く，変化の運動エネルギー（余勢，惰性）まで問題になるようなものは扱わないが，このような準静的変化で周期運動をするものを考える．熱機関の「平衡状態の準静的周期運動」という，時間的に変化するものを扱うのである．周期運動は一周するのにいくらか時間がかかるのだが，その時間の遅速は問題にしない．したがって「時」が何であるかは問題にせず，単にパラメーターとして扱われる．

「状態」とは熱機関に普遍的に考える温度θ，圧力P，体積V（シリンダーがたくさんあれば$P_1,\cdots,P_d,V_1,\cdots,V_d$）の他に，小宇宙なる多様体上のさまざまな不変量$m_1,\cdots,m_n$ [13)] のようなものを想定してもらいたい．状態は $s=(\theta,P,V,m_1,\cdots,m_n)$ のように表すが，これらの間には何らかの複数の関係式（特性関係式）があるものとしている．ひとつの熱機関の状態の全体はなにか空間とよべるもの（超曲面）をなしている．この小宇宙を**状態空間**とよび，$\mathbb{G}$と書いておく．また，記号$\mathbb{G}$は考えている熱機関そのものを表す記号としても使う．

カラテオドリー (C. Carathéodory, 1873–1950) が考えているのはこれらの小宇宙の集団の「社会学」である．これが時間を机上に持ち

---

12) 静的変化と言ってしまったら，止まりながら動くという矛盾したものになる．
13) たとえばスカラー曲率の積分．

出すときのヒントになると考えるのである．要点を述べると

（光：時間：エネルギー）＝（温度：エントロピー：熱）

といった比例式で考えるということである．これは，昔，夏目漱石門下だった寺田虎彦も書き残している考え方で，別段新しいものではないが，その後，この考え方は実際的戦略が出せなくて，結局「高嶺(ね)の花」(untachable) として葬られている考え方であるが，この考え方は現今おおはやりのモジュライ空間上の幾何学を考えるときの参考にもなる．

5.1 熱力学の第１法則，第２法則

ここでは熱機関は単純化して次のように定義する．状態空間は $\mathcal{M}$ とし，これは多様体であるとする．

定義 5.1 熱機関とは状態空間（時間が捨象されている空間）内の閉曲線 $C(t)$, $0 \le t \le 1$, $C(0)=C(1)$, として表されるものである．

熱機関の状態変化を記述するために使う t は時間には違いないが数学的には単なるパラメーターである．状態空間 $\mathbb{G}$ は（運動エネルギーは無視されているので）一般力学系でいう相空間そのものではない．

熱機関を表す状態空間 $\mathbb{G}$ 内の閉曲線を

$$C(t) = (\theta(t), P_1(t), \cdots, P_d(t), V_1(t), \cdots, V_d(t), m_1(t), \cdots, m_n(t))$$

と表す．運動のエネルギーを考えないときには力学的仕事量は「力 × 移動距離」だから，準静的に変化する熱機関が（外に対して）おこなう仕事量（エネルギー）はピストンのシリンダーの断面積を 1

としておけば，シリンダー内の圧力 $P\times$ 体積変化 dV である．シリンダーがたくさんある場合はそれらを総和する．すると 1 周線積分

$$\int_C \sum_i P_i dV_i = \int_0^1 \sum_i P_i(t)\frac{dV_i(t)}{dt}dt$$

は熱機関が 1 周期におこなう力学的仕事量である．積分をおこなうときにはパラメーター t は別のものに変換してもかまわないので，単に左辺のように書くのである．

積分される微小量だけみると $\sum_i P_i dV_i$ だが，このように書かれたものを **1 次微分形式**とよぶ．一般には

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_i M_i(\boldsymbol{x})dx_i$$

のように書かれるものをさすが，曲線に沿っての積分（線積分）が考えられるもので，任意の曲線 $S=\{\boldsymbol{x}(t);\ 0\le t\le 1\}$ に対し

$$\int_S \omega = \int_0^1 \Big(\sum_i M_i(\boldsymbol{x}(t))\frac{dx_i}{dt}\Big)dt$$

である．積分される微小量だけに注目して，曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ の接線

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \Big(\frac{dx_1(t)}{dt}, \cdots, \frac{dx_n(t)}{dt}\Big)$$

に対して

$$\omega\Big(\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\Big) = \sum_i M_i(\boldsymbol{x}(t))\frac{dx_i(t)}{dt}$$

と定義しておく．これを**内部積**とよぶ．要は $\int_S \omega = \int_0^1 \omega\Big(\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\Big)dt$ と書けるように簡略化しただけである．

すると，1 次微分形式 ω を点 p で考えたもの ω_p と，p における接ベクトル X に対しても内部積 $\omega_p(X)$ が考えられる．

これの 0, 正, 負に応じて

1 次微分形式は各接空間を超平面で二分する

ことがわかる．

そこで，状態の微小変化に応じて次のものを考える：

●装置が吸収する熱エネルギー　これが 1 次微分形式で与えられるものとし，これを ω_Q と表す．ここで $\omega_Q(\frac{ds(t)}{dt})>0$ は装置が熱を吸収し，<0 は熱を吐き出していることを表している．さらに自然な仮定として ω_Q の係数が全部 0 とか，どれかの係数が ∞ となるような点（特異点）はないものとする．

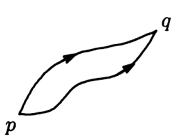
これに調子をあわせて力学的仕事量を表す微分形式のほうも

$$\omega_L = \sum_{i=1}^{d} P_i dV_i \quad (d\ \text{はシリンダーの個数})$$

のように書いておく．

●古典熱力学の第 1 法則　これはエネルギー保存則で，任意の閉曲線 C に沿って $\int_C (\omega_Q - \omega_L) = 0$ だというのである．これは，熱機関が，ある状態から出発し閉曲線 C に沿って一回りして始めの状態に戻ったとき，熱機関が 1 周期で吸収する熱エネルギー（熱機関に 1 周期で与えられる熱エネルギー）は全部力学的仕事に変わると言っているのである．

閉曲線についてだけ述べていて，閉曲線でなければ熱機関が吸収する熱エネルギーのかなりの部分が状態の変化に使われてしまい，全部力学的仕事に使われるとは限らないことに注意する．



一般に 1 次微分形式 ω が任意の閉曲線 C に沿って $\int_C \omega = 0$ という性質を持つと，p, q を結ぶ曲線 S に沿う線積分 $\int_S \omega$ は S の両端 p, q に

のみ依存し径路にはよらない．そこで p を固定し，$q=\boldsymbol{x}$ を動かせば状態空間上の関数 $E(\boldsymbol{x})$ が得られるが，$E(\boldsymbol{x})$ の全微分 $dE=\sum_i \frac{\partial E}{\partial x^i}dx^i$ をとると，微積分の基本定理 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$ と同じ原理で $\omega=dE$ となることがわかる．

第 1 法則は E という状態空間上の関数 E があり

$$dE=\omega_Q-\omega_L \quad \text{（関数の全微分）}$$

と書かれると言っているのである．E をその状態の**内部エネルギー**（各状態が蓄えているエネルギー．位置のエネルギー）とよぶ．

●第 2 法則　これは次のように述べられる．熱を吸収するのみの熱機関[14)]で，その結果熱機関に与えられた全エネルギーを力学的仕事のみに費やすような熱機関は存在しない．

門外漢にとってはこのような否定形で述べられる原理の深意を理解するのは極めて難しいのだが，第 2 法則はあきらかに熱の出入りを示す微分形式 ω_Q の性質を述べている．つまり，第 1 法則は 1 周期で熱機関に与えられた全エネルギーは力学的仕事のみに費やされると言っているのだから，上の文言は熱を吸収するのみの熱機関は存在しないと言っているのである．つまり，閉曲線 $C(t), 0\leq t\leq 1,$ では $\omega_Q(\frac{dC(t)}{dt})>0$（熱を吸収）のところがあったら，必ず $\omega_Q(\frac{dC(t)}{dt})<0$（熱を放出）のところがなければならないというのである．これと，ローレンツ多様体での因果構造とを見比べてもらいたい．

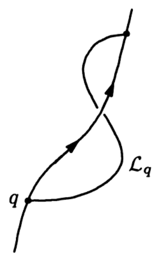
古典熱力学の第 2 法則は上のような性質の微分形式 ω_Q の存在を要求しているのだから状態空間の性質を述べてもいるのである．

---

14)　多くの教科書では，「加熱装置のみで作動する熱機関」となっている．

曲線 $\nu(t),\ 0 \leq t \leq 1$, が $\omega_Q(\frac{d\nu(t)}{dt})=0$ をみたすとき，平衡曲線とよんでおこう．熱の出入りのない状態変化である．$\mathcal{L}_q$ を，状態 q から $\mathbb{G}$ 内で平衡曲線で結べる（熱の出入りなしに変形できる）点（状態）の全体とする．ω_Q に自然に要求した仮定により，$\mathcal{L}_q$ は $\mathbb{G}$ の開集合を含まないことがわかる．

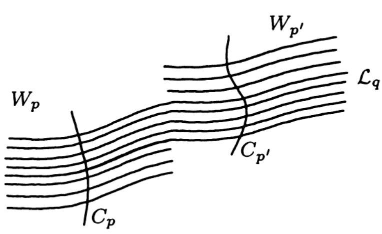
さらに，状態 $p \in \mathbb{G}$ をひとつ固定し p を通る曲線で，装置が一方的に熱を吸収するのみの変化曲線 $\mu(t)$ として，$\omega_Q(\frac{d\mu(t)}{dt})>0$ となるものを考え，これを t の正，負の方向に伸ばせるだけ伸ばして



$-\infty < t < \infty$ で定義されたものを考え，このような曲線を C_p とする．さらに，曲線 C_p と $\mathcal{L}_q$ は（左図のように 2 点で交われば第 2 法則に矛盾する熱機関になってしまうから）1 点でしか交われないことがわかる．

すると，C_p と交わる $\mathcal{L}_q$ の全体 $W_p = \bigcup_{q \in C_p} \mathcal{L}_q$ が $\mathbb{G}$ の開集合になることは感覚的にあきらかであろう．

すると W_p の中の点 r はどれかの $\mathcal{L}_q$ に属し，それは C_p と 1 点で $\mu(s)$ しか交わらないのだから，その s を点 r の値と考えて，関数 $s=s(r)$ が作られる．



W_p 一つでは $\mathbb{G}$ 全体を覆えなくても，さまざまなところで $W_{p'}$ を作り，それをつないで考えれば，結局 $\mathbb{G}$ 全体で定義された関数 $s_{\mathbb{G}}$ があり，どの $\mathcal{L}_q$ も $s_{\mathbb{G}}(r)=c$ という形で定義される $\mathbb{G}$ の中の（余次元 1 の）超曲面だということがわかる．

すると $ds_{\mathbb{G}}=0$ も $\omega_Q=0$ も，同じ $\mathcal{L}_q$ の接空間を定義しなければならないから，これは各点で比例していなければならず，なにか関数 $t_{\mathbb{G}}$ があって $\omega_Q=t_{\mathbb{G}}ds_{\mathbb{G}}$ と書かれなければならないことになる．第２法則は $\omega_Q=t_{\mathbb{G}}ds_{\mathbb{G}}$ となっていると言っているのである．$s_{\mathbb{G}}$ を(局所)エントロピーとよぶ．$t_{\mathbb{G}}$ はなにか関数というだけである．

これでわかるように熱機関は $\mathbb{G}$ 依存のものである．にもかかわらず構成される言語系は同型であるから，熱機関というものについてならば普遍性のある言語系になっている．しかし，共通のものについての直接対話可能な言語系になっているわけではない．

5.2　絶対温度，エントロピー

対話可能な言語系はどうすれば作れるだろうか？

カラテオドリーは熱機関 $\mathbb{G}$ と熱機関 $\mathbb{G}'$ を熱の良導体で“つなぐ”[15] という概念を持ち出して，絶対温度，エントロピーという概念が $\mathbb{G}$ 依存でなく，普遍的概念であることを示すのである．

まず $\mathbb{G}$ と熱機関 $\mathbb{G}'$ を熱の良導体でつないだものも熱機関である．これを $\mathbb{G}\cup\mathbb{G}'$ と書く．温度は共通だが他の変数はただ並列されるだけで，つないだことによる影響はなく互いに独立だと考える．ここでも第１，第２法則は成立するはずである．

熱機関 $\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2,\cdots,\mathbb{G}_m$ を考え，$\mathbb{G}_j$ における，力学的仕事，吸収する熱エネルギーを表す微分形式をそれぞれ

$$\omega_{L_j}=\sum_i P_i^{(j)}dV_i^{(j)},\quad \omega_{Q_j}=t^{(j)}ds^{(j)}$$

15)　つなげば平衡状態は瞬時に達成されるとしている．つまり温度 θ は共通．

と表す．さらに上の熱機関を熱の良導体で全部つないだ熱機関 $\mathbb{G}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{G}_m$ を考え，力学的仕事，吸収する熱エネルギーを表す微分形式を

$$\overline{\omega}_L = \sum_j \omega_{L_j} = \sum_{i,j} P_i^{(j)} dV_i^{(j)},$$
$$\overline{\omega}_Q = \bar{t} d\bar{s} = \sum_j \omega_{Q_j} = \sum_j t^{(j)} ds^{(j)}$$

とする．力学的仕事はシリンダーの総数だけ和がとられており，吸収する熱エネルギーは各機関が吸収する熱エネルギーの和である．ここで，熱の良導体でつないだのだから「温度」θ なるものは共通で，他の変数は独立である．

上の第２式から

$$d\bar{s} = \sum \frac{t^{(j)}}{\bar{t}} ds^{(j)}$$

であるが，関数の全微分というのは

$$df(x_1, \cdots, x_n) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

のように中に入っている変数すべてが dx_i の形で出てくるものだから，これは $\bar{s}$, $\dfrac{t^{(j)}}{\bar{t}}$ が $s^{(1)}, \cdots, s^{(m)}$ のみの関数であることを意味する[16]．したがって特に温度 θ は含まないから

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{t^{(j)}}{\bar{t}}\right) = \frac{1}{\bar{t}} \frac{\partial t^{(j)}}{\partial \theta} - \frac{t^{(j)}}{\bar{t}^2} \frac{\partial \bar{t}}{\partial \theta} = 0$$

がわかり，変形して

$$\frac{1}{t^{(1)}} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{1}{t^{(2)}} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial \theta} = \cdots = \frac{1}{t^{(m)}} \frac{\partial t^{(m)}}{\partial \theta} = \frac{1}{\bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial \theta},$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log t^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \theta} \log t^{(2)} = \cdots = \frac{\partial}{\partial \theta} \log \bar{t}$$

16) ここは本当はもっと丁寧に考えるべきところである．

がわかる．θ 以外の変数はみな独立だったから，上のことは $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log t^{(j)}$ $(j=1,\cdots,m)$，$\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log\bar{t}$ は温度 θ のみの共通の関数でなければならない．これを $g(\theta)$ と書いておく．すると，これらを積分して

$$\log\bar{t}=\int_0^\theta g(\eta)d\eta+\log\bar{A}(s^{(1)},\cdots,s^{(m)})$$

$$\log t^{(j)}=\int_0^\theta g(\eta)d\eta+\log A^{(j)}(s^{(j)})$$

の形となる．$T=\exp\left(\int_0^\theta g(\eta)d\eta\right)$ とおき，これを**絶対温度**とよぶ．

$t^{(j)}=\exp\left(\int_0^\theta g(\eta)d\eta\right)A^{(j)}(s^{(j)})$ だから，$\sigma^{(j)}=\int_0^{s^{(j)}}A^{(j)}(s^{(j)})ds^{(j)}$ と変数を取り直すと，

$$t^{(j)}ds^{(j)}=Td\sigma^{(j)}$$

となることがわかる．平衡状態に達している機関 $\mathbb{G}$ では T は $\mathbb{G}$ できまる定数（不変量）である．

$$\overline{\omega}_Q=\bar{t}d\bar{s}=\sum_j\omega_{Q_j}=\sum_j t^{(j)}ds^{(j)}=T\sum_j d\sigma^{(j)}$$

だから，$\sigma=\sum_j\sigma^{(j)}$ とすれば $\overline{\omega}_Q=Td\sigma$ となる．σ を全装置 $\mathbb{G}_1\cup\cdots\cup\mathbb{G}_m$ の**エントロピー**とよぶ．

そこで，この世のすべての熱機関を想像し，これらすべてを熱の良導体でつないだと想定してみよう．このとき，浮かび上がってくる「絶対温度」と「エントロピー」はいったいどういう性格のものであろうか？　あきらかにこれらは，個々の熱機関に属するものではなく，「熱機関社会」に共通の普遍的概念として登場してくるのである．

5.2.1 エントロピー増大の法則

古典熱力学には「エントロピー増大の法則」という形で「時」というものを意識させるものが登場している．つまり，エントロピー増大の法則は $\dfrac{d\sigma(t)}{dt} > 0$ を要求して t の変化の方向を条件づけている．「時間」に相当するエントロピーがどのような形で登場するのかを見ておこう．

これまで,「状態」とか「状態空間」という言葉を常識にまかせて使ってきたが，ここでもう少し数学的に割りきってみよう．

状態という言葉は時間的に継続しているものをさすから，状態空間をもう少し数学的に単純化して考えるために，ローレンツ多様体 $\mathcal{M}$ 上に時の流れというものを考える．これはローレンツ多様体に自然に備わっているものではなく，熱機関に依存して新たに付け加わる構造である．

●群の作用と商空間　単位元を e とする群 G が集合 X に**作用する**とは**作用**とよばれる写像 $\lambda : G \times X \to X$ があり，$\lambda(g,x)$ を $\lambda(g)(x)$ のように書いたとき次の性質を持つ場合をいう：

(1)　任意の $x \in X,\, g,h \in G$ について $\lambda(g)\big(\lambda(h)(x)\big) = \lambda(gh)(x)$,

(2)　任意の $x \in X$ について $\lambda(e)(x) = x$.

$x \in X$ に対し，X の部分集合 $\lambda(G)(x)$ を**軌道**とよび，各軌道を点と思って作る軌道全体の集合を商空間とよび，$\lambda(G)\backslash X$ と書く．

実数全体 $\mathbb{R}$ は加法（$\pm$ の演算）に関して自然に群をなす．

●時の流れ　$\mathbb{R}$ が $\mathcal{M}$ に作用しており，その作用を $\varphi : \mathbb{R}\times\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ としたとき，$\varphi_t(p)$ がすべて null-測地線とする，さらに流れの接ベクトル $\dfrac{d\varphi_t(p)}{dt}$ を $V_0(p) = \sum_i V_0^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ と表す．測地線ということから

$\nabla_{V_0} V_0 = 0$ であり，null ということから $\sum_{i,j} g_{ij}(p) V_0^i V_0^j = 0$ である．これは不定値計量からきまる（不定値）内積を使って $\langle V_0, V_0 \rangle_p = 0$ と書いてもよい．

定義 5.2　$\mathcal{M}$ 上にある関数 f があって，流れの接ベクトル V_0 を共変全微分すると $(\nabla V_0)(p) = V_0(p) df = \sum_{i,j} V_0^i \dfrac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ となるとき，この作用を**時の流れ**とよび，$V_0 = \dfrac{d\varphi_t}{dt}$ を**心理的時間の矢**とよぶ．

“心理的”と付け加えるのは，これは熱機関ごとに固有のもので熱機関にとっての時間の矢と考えるからである．各熱機関にとっての時の流れは，光錐（零錐）上を走る null-測地流 $\varphi(\mathbb{R})$ である．この群の商空間 $\varphi(\mathbb{R})\backslash\mathcal{M}$ が状態空間であると考える．これは $\mathbb{G}$ 依存であり，時間は捨象されている．無論，これは過度の単純化であろう．しかし，こう割りきってしまうと，エントロピー増大の法則と，時の流れの一方向性の関係が鮮明になるのである[17]．

$$\omega_{\mathbb{G}} = \sum_{i,j} g_{ij}(\boldsymbol{x}) V_0^i dx^j \tag{7}$$

と定義する．不定値計量からきまる内積を使って $\omega_{\mathbb{G}}(X) = \langle V_0, X \rangle$ と書いてもよい．

詳しい計算は省略するが，これより

$$d\omega_{\mathbb{G}} = df \wedge \omega_{\mathbb{G}}, \quad d(e^{-f}\omega_{\mathbb{G}}) = 0$$

が得られ，局所的には $e^{-f}\omega_{\mathbb{G}} = d\sigma$ のように関数の全微分の形に書かれる．$T = e^f$ とすると $\omega_{\mathbb{G}} = T d\sigma$ である．

17）平衡状態を考えて時間を捨象したはずなのに，時間に関することを発言するという離れ業をやっているのである．

これらは $\mathcal{M}$ 上の話であるが，$df(V_0)V_0=\nabla_{V_0}V_0=0$ より f が各軌道上で一定，さらに $\langle V_0,V_0\rangle=0$ も使うと ω_Q も各軌道上一定と考えてよく，結局 $\omega_{\mathbb{G}}=Td\sigma$ は（$\mathcal{M}$ より 1 次元低くなった）状態空間上の 1 次微分形式であることがわかる．

つまり，上のように単純化した状態空間の数学モデルでは次が成り立つ：

定理 5.1 熱力学の第 2 法則は定義4.1 における因果構造の言い換えである．

5.3 一般力学系との比較

19 世紀の後半に，運動学の最終理論のような顔をして登場するのが，一般力学系である．運動にまつわるものは，すべてその中で完全に言語化されているとされる．というか，これが運動というものの定義である．つまり,「同じ」という言葉が「同値律」,「まっすぐ」という言葉が「慣性法則」でなければならないように,「運動」という言葉は「正準形式」で書かれなければならないというのである．

今日では熱の正体は分子運動のようなブラウン運動する微小振動であると考えられている．ブラウン運動は水中の花粉のようなものの運動から理想化，抽象化された概念として説明されることが多いが，花粉といえども，質量を持っているから物理理論に従えば光速を超えた運動は否定されているはずである．ところが，ブラウン運動に関する数学理論では粒子は確率 1 で速度 ∞ の粒子である．

物理がこの矛盾を気にしないのはおかしいのだが，文献をあたってみても「相対論的熱力学」というのは見たことがない．これはな

ぜだろうか？　論争するにはあまりにもかけ離れた感覚のものであるようにも思えるし，もともと物理はどの理論にも適応限界があるのが普通なのだからあまり気にならないのかもしれない．しかし，数学にはこのような自己矛盾を嫌う性格がある．熱伝導の方程式は

$$\frac{d}{dt}f = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f \tag{8}$$

である．一方，電磁波のような波動の方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}f = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f \tag{9}$$

である．相対論でいう時間と熱伝導方程式に現れる時間は同じものではなく，熱伝導方程式に現れる時間は相対論に現れる固有時（個々人にとっての心理的絶対時間）と解釈すべきもののように思えるのである．この形式的な違いは後のほうで代数表示のパラメーターとの関係で再び現れてくる．(§9.1.2 参照)

ところで，前節の $\omega = \omega_Q - \omega_L$ は一般力学系に現れる正準形式 θ とよく似た形をしている．並べて書くと

$$\omega = Td\sigma - \sum_i P_i dV_i, \qquad \theta = Hdt - \sum p_i dq_i$$

絶対温度にあたるところが，ハミルトン関数とよばれる力学系を支配している関数 $H(t,q,p)$ で，$(t,q^1,\cdots,q^n)$ は時空座標，$p_1,\cdots,p_n$ は運動量座標である．θ は**接触形式** (contact form) とよばれるが，H の部分を独立変数と考えた微分形式 $\Omega = Edt - \sum p_i dq_i$ を考え，Ω を $E = H(t,q,p)$ に束縛した姿と考えることが多い．E はエネルギー変数とよばれる．シンプレクティック形式とよばれる 2 次微分形式

$$d\Omega = dE \wedge dt - \sum dp_i \wedge dq_i$$

を使って考えることも多いが，こちらはエネルギー E を時間 t と正準共役な独立変数として扱う立場である．どちらで考えても決定的対立は生まないからあまり問題にされてないが,「時間」を扱うときにはかなりの違いがでる．私はこの違いをあばくことに照準をあわせている[18]．

曲線 $c(\tau)=(t(\tau),q(\tau),p(\tau))$, $0\leq\tau\leq 1$, に沿って 1 次微分形式 $\omega=H(t,q,p)dt-\sum p_i dq^i$ の線積分

$$L(c)=\int_0^1\Big(H(t(\tau),q(\tau),p(\tau))\frac{dt}{d\tau}-\sum p_i(\tau)\frac{dq^i}{d\tau}\Big)d\tau$$

を考える．

L を c の関数と考えたとき L が極値（もっと広く停留）となる点 c を求めることを考えよう．つまり両端を固定したままの変分で $\delta L(c)=0$ となる曲線 c を求めることを考えよう．以下の計算では，記号を簡略化して $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ を単に ∂_{x^i} とか ∂_i と書くことにする．

両端を固定したまま曲線をパラメーター s 付きで（C^∞-級に）動かして $c_s(\tau)=(t(\tau,s),q(\tau,s),p(\tau,s))$ とし，$c_0(\tau)=c(\tau)$ とする．$s=0$ で停留としているから $\dfrac{d}{ds}\Big|_{s=0}L(c_s)=0$ となるべきで，$c(\tau)$ に沿って $\dfrac{\partial}{\partial s}c_s\Big|_{s=0}=\dot{t}(\tau)\partial_t+\dot{q}^i(\tau)\partial_{q^i}+\dot{p}_j(\tau)\partial_{p_j}$ とすると，微分と積分の順序交換と部分積分で



$$\frac{\partial}{\partial s}L(c_s)\Big|_{s=0}=\int_0^1\Big((dH-\partial_t H dt)(X_H)\dot{t}$$
$$+(dp_i+\partial_{q^i}H dt)(X_H)\dot{q}^i-(dq^j-\partial_{p_j}H dt)(X_H)\dot{p}_j\Big)d\tau=0$$

となる．$\dot{t},\dot{q}^i,\dot{p}_j$ が任意だから，$\dfrac{dt}{d\tau}=T$ とおき，変分学の基本補題

18) これは故佐々木重夫教授の夢でもあったと私は勝手に理解している．

を使って次の式が得られる：

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = T \\ \dfrac{dq^i}{d\tau} - (\partial_{p_i} H)T = 0 \\ \dfrac{dp_i}{d\tau} + (\partial_{q^i} H)T = 0 \\ \displaystyle\sum_i (\partial_{q^i} H)\frac{dq^i}{d\tau} + \sum_i (\partial_{p_i} H)\frac{dp_i}{d\tau} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

第 4 の式は（t を含む）エネルギー等式で上の三つからでてくる．

$\dfrac{dt}{d\tau} = 1$ の場合は一般力学系ではおなじみの式であろうが，$\neq 1$ のときに T の自由性はどう解釈すればよいのかは不明である．τ は曲線を表すパラメーターにすぎないから数学的には何を取ってもよいのだが，一般相対論ではローレンツ計量に関する測地線の方程式が，ハミルトン関数を

$$H = c_0\sqrt{1 + \sum g^{ij} p_i p_j} \quad (g^{ij} \text{ は } (g_{ij}) \text{ の逆行列成分})$$

で与えたときの (10) 式と一致するように T が選ばれていて，τ は観測者の時計による時間と解釈されている[19]．

ハミルトン系の考え方では，どんな運動も，あるポアソン代数と，あるハミルトン関数 H とで書かれており，運動は H によって引き起こされるのだと考えるのだから，それなりのハミルトン関数を用意しなければならない．人は，直接手をくだして運動をコントロー

19）この場合の H はラグランジュ系で考えた変分問題

$$\delta \int \sqrt{1 - g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\, d\tau = 0$$

をルジャンドル変換して得られる H である．これは，観測者が手に持っているセシウム原子できめる時間のことであり，ローレンツ計量を与える線素ではない．

ルできず，運動を支配しているハミルトン関数をコントロールすることで，間接的にしか運動を支配できないからである．

$\{f, g\} = 1$ という関係にある $f, g \in \mathcal{O}$ は互いに**正準共役**であるといわれる．荒っぽく言えば，g を動かすためには f をハミルトン関数として用意しなければならないと言っているのである．

運動とは素朴には連続体（非可算無限）内の変化のことである．動くものが在ると考えることは，動かすもの（正準共役）も在ると考えないと，運動に関することが言語にならないのである．

量子論の基本原理のひとつに「不確定性原理」というものがある．これは正準共役とよばれる一組の量の両方を同時に無限に正確に観測することは不可能だとする原理である．熱力学の第２法則の場合と同様，門外漢にとってはこのような否定形で述べられる原理の深意を理解するのは極めて難しい．これを肯定的，積極的意味を持った命題に変えるのは，結局「観測」という我々の行動も，運動をコントロールするときと同じ力学の原理によるのだということをあからさまに机上に持ち出して初めて可能となるのである．これは，最初に述べたように，運動は人間の手で直接コントロールするのではなく，間接的にコントロールできるだけだということの現れである．何を観測するにしても，観測値とは対象が測定器に及ぼす微かな変化を拡大して数値化したものである．この変化が力学の原理に従うものとすれば，対象は自分を全く変化させないで測定器だけに変化を起こさせることはできない．

6

時空が非可換？

伝統的微分幾何学の立場から，最近の物理学，特に場の理論の方面の人たちの話を聞いていると，ときどき目まいのような不安に襲われることがある．真空というのは「何もない」ということかと思っていると，負のエネルギー状態は全部電子がつまっているのだという．これは相対論以前のエーテルの復活かと思っていると，そうでもない．電子を扱うときには電子場を考えねばならず，これはその２乗が存在確率の密度関数を与えるものという解釈で登場するのだが，後になるとそれがあたかも実体であるかのように電磁場と相互作用する．これくらいならまだよいのだが，点粒子だと思っていた素粒子は実は弦（紐）なのだという．時空は4次元多様体かと思っていると，実はそうではなく11次元だったり，26次元だったりする．こういうことも慣れてしまうとどうということはないのだが，ときどき，「物理学者が空間とよんでいるものは，数学者が普通使う集合にはなっていないのではあるまいか？」といった疑問がモヤモヤとわき上がってくるのである．若い物理学者たちは，もはや伝統的な空間概念に固執しないで，なにか新しい空間概念に向かって漂流を開始したようにみえるのである．しかし，場所とか位置の無い

(pointless) ところで幾何学を作れと言われてもどうすればいいのだろうか?

その行きつく先はおそらくだれも知らないし，現状では「何でもあり」の混乱状態なのであるが，幾何学という，空間概念を真正面から問題にする数学をやっている者ならだれでも，この物理学の動きに興味を持つであろう．同じように漂流してみたくなるのも人情というものである．

そこで，もう少し前章の考え方や，心理的絶対時間が浮き彫りになるような数学的模型を考えてみよう．これはあくまで，幾何学者にとってもう少し居心地のよい物理モデルを作ってみようという試みであるから，現今はやりの物理とはあまり関係がない．強いて言えば，幾何学者が感覚的に受け入れ可能な物理世界とでも言っておくべきものである．

6.1 非可換有向正規順序群

G を群であるとしよう．群 G 上に半順序関係 $\succ$ が定義されており，それが

$$x \succ y \text{ ならば，任意の } z, z' \in G \text{ で } zxz' \succ zyz'$$

となる場合，**正規順序群**とよぶ．G の単位元を e とし，

$$C_+ = \{x \in G;\ x \succ e\}, \quad C_- = \{x \in G;\ e \succ x\}$$

とする．$\forall g \in G$ は逆元 g^{-1} を持つが，写像 $g \to g^{-1}$ には $(g^{-1})^{-1} = g$, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ という性質があることはあきらかであろう．

容易に，$x \succ y$ と $y^{-1} \succ x^{-1}$ が同値，$(C_+)^{-1} = C_-$ などがわかる．さらに $G = C_+C_-$ となる場合，**有向**とよぶ．

以下の話の要点を先に述べておこう．相対論の考えでは，自然界には「時の流れ」のような単一のものは存在せず，在るのは時の前後関係を与える光錐だけである．これは数学的には半順序関係と理解される．そこで，一般に有向正規順序群に対して C_+ を光錐と考えるのである．

一般に，群 G において $gh = hg$ がつねに成立する場合，G を**可換群**とよび，そうでない群を**非可換群**とよぶ．

群 G から別の群 G' への写像 $\psi : G \to G'$ が $\forall g, h \in G$ に対して $\psi(gh) = \psi(g)\psi(h)$, $\psi(g^{-1}) = \psi(g)^{-1}$ をみたすとき，**準同型**（写像）とよぶ．つまり，許されている演算を保つ場合このようによぶ．写像という言葉は省くことが多い．写像 $\psi : G \to G'$ がさらに全単射[20] のとき同型写像とよぶ．この場合 $G \cong G'$ と書いて G と G' が同型だという．**同型であっても同じものとは限らない**．$G = G'$ のときの同型写像を**自己同型**とよぶ．

非可換な有向正規順序群で，これがセンターとよばれる特別な１径数部分群（後出）を持ったものをひとつ考え G_α とする．そして，この１径数部分群を個人依存の心理的絶対時間と考え，この群が作る流れを時の流れと考える．

そこで，個々人それぞれ違う心理的絶対時間を持った非可換有向正規順序群の集団(社会) $\mathcal{G} = \{G_\alpha;\ \alpha \in I\}$ を考える．ただし，G_α たちは群としては互いに同型とする．

●対話と共通言語　時の流れを持った非可換有向正規順序群の集団（社会）での共通言語は何であるべきかを考えようというのである．ここで初めてローレンツ群が登場するのである．

---

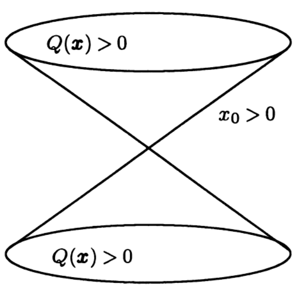
[20] １対１ onto の写像ともいう．

●群の表現と共変性 $\mathcal{G}$ の元の具体的表示法は $\mathbb{G}$ 依存である．したがって，（非相対論的）量子論を語るときの時間は，相対速度 0 の相手とのみわかり合える時間である．つまり，群による共変性が要求されるのは共通描像を持とうとするためである．いろいろな $\mathbb{G}$ での言語化に普遍性を持たせるための言語はローレンツ共変性を持った言語でなければならないと考えるのである．では，このとき共通の時間のパラメーターとして何を使うべきかが問題になるが，それについては 9 章の命題9.2 を見て考えてみてほしい．

命題 6.1 共通の時空についての対話可能な言語はローレンツ共変性を持った言語である．

おそらく群の表現論が必要なのはこのためである．持ち前の言語だけでは足りなくなるのだが，このとき手持ちの群がなにか線形群の中に表現されておれば既約表現分解は共通言語を作る手段になるのである．素粒子論が数学的には表現論の一種だと思われていた時代もあったのである．

●ミンコフスキー空間 半順序構造を持った典型的集合としてミンコフスキー空間をあげておこう．



d+1-次元数空間 $\mathbb{R}^{1+d}$ で 2 次形式 $Q(\boldsymbol{x})=x_0^2-(x_1^2+\cdots+x_d^2)$ を考える．さらに，未来錐として

$$V_+=\{\boldsymbol{x}\,;\,Q(\boldsymbol{x})\geq 0,\ x_0\geq 0\}$$

を考え，半順序関係を

$$\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}\Longleftrightarrow\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in V_+$$

として定義する．これは可換な有向正規順序群である．

以下で非可換な有向正規順序群の例を作るが[21]，そのためにリー群の取り扱いを少し練習しないといけない．数学では計算できるリー群の例として，正則 n 行 n 列(正方)行列の全体 $GL(n)$ がよく現れる．これを**一般線形群**とよぶ．この群およびその部分群についての基本的なことは既知とするので，知らない人は適切な線形代数の教科書を傍らにおいて読み進んでもらいたい．ここでは，簡単だが，あまり教科書に書かれていない群で考えていく．

★例 1．まず，E を d-次元線形空間，$\omega : E\times E \to \mathbb{R}$ を双線形写像とし，$E\times\mathbb{R}$ に次のように積を定義する：

$$(X,a)(Y,b)=(X+Y,a+b+\omega(X,Y)). \tag{11}$$

$(0,0)$ は単位元，$(X,a)(-X,-a+\omega(X,X))=(0,0)$ だから (X,a) の逆元 $(X,a)^{-1}$ は $(-X,-a+\omega(X,X))$ である．結合律が成立していることは容易にわかるからこれで群ができている．この群を $E\times_\omega\mathbb{R}$ と書いておく．

ω が対称，$\omega(X,Y)=\omega(Y,X)$ だと，群は可換群，ω が歪対称，$\omega(X,Y)=-\omega(Y,X)$ だと非可換な群ができている．ここまでは，ω は 0 でもかまわなかったが，$\forall Y\in E$ について $\omega(X,Y)=0$ となるような X は $X=0$ の場合に限るとき，ω を**非退化**とよぶ．ω が非退化歪対称のとき $E\times_\omega\mathbb{R}$ は**ハイゼンベルグ群**とよばれる．

一般に群 G の部分群 N が**正規部分群**であるとは，$\forall g\in G$ に対して $gNg^{-1}=N$ が成立する場合をいう．

$\mathbb{R}$ は $E\times_\omega\mathbb{R}$ の正規部分群であるが，実はここの元 a は他のすべての元と可換 $(ag=ga)$ である．このようなものを**センター**とよぶ．

---

[21] 20 年前の稿ではこのようなものは可換群しかないと記述している．これは間違いなので，お詫びして訂正します．

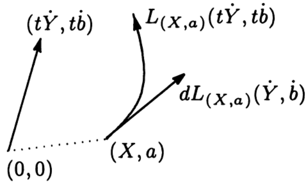
$E\times_\omega\mathbb{R}$ は集合としては直積集合 $E\times\mathbb{R}$ と同じである．(X,a) を固定して，これを左から掛けることを $L_{(X,a)}$ と書き，全単射 $L_{(X,a)}$: $E\times_\omega\mathbb{R}\to E\times_\omega\mathbb{R}$ を (X,a) による**左変換**とよぶ[22]．原点 $(0,0)$ から出る直線 $(t\dot{Y},t\dot{b})$ に対し,

$$(X,a)(t\dot{Y},t\dot{b})=(X+t\dot{Y},a+t\dot{b}+\omega(X,t\dot{Y}))$$

は点 (X,a) から出る曲線になるが，$t=0$ における接線は

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(X+t\dot{Y},a+t\dot{b}+\omega(X,t\dot{Y}))=(\dot{Y},\dot{b}+\omega(X,\dot{Y}))$$

である．(X,a) を固定して考えれば，写像 $(\dot{Y},\dot{b})\to(\dot{Y},\dot{b}+\omega(X,\dot{Y}))$ は原点 $(0,0)$ の接空間から点 (X,a) の接空間への線形写像となる．この線形写像を $L_{(X,a)}$ の**微分写像**とよび，記号 $dL_{(X,a)}$ で表す.



★例 2．一般に群 G の部分集合 $\{g(t);\,t\in\mathbb{R}\}$ で，$g(s)g(t)=g(s+t)$ をみたすものを**1径数部分群**とよぶが，$E\times_\omega\mathbb{R}$ の (C^∞-級) 曲線でこのようなものを考える．これは

$$(X(t),a(t))(X(t'),a(t'))=(X(t+t'),a(t+t')),\ (X(0),a(0))=(0,0)$$

となる部分群のことだから

$$\big(X(t)+X(t'),a(t)+a(t')+\omega(X(t),X(t'))\big)=(X(t+t'),a(t+t'))$$

であるが，第１成分から，$X(t)=t\dot{X}$ がわかり，これを第２成分に代入して，t' で微分して $t'=0$ とすると，$\left.\frac{d}{dt'}\right|_{t'=0}=\dot{a}$ として

22) 同様に右変換 $R_{(X,a)}$ も定義される.

$$\frac{d}{dt}a(t) = \dot{a} + t\omega(\dot{X}, \dot{X})$$

となるから，これを初期条件 0 で解いて，

$$(X(t), a(t)) = \left(t\dot{X}, t\dot{a} + \frac{1}{2}t^2\omega(\dot{X}, \dot{X})\right)$$

であることがわかる．これを一般のリー群のときの記号にあわせて，$\exp t(\dot{X}, \dot{a})$ のように書く．1 径数部分群は初期微分だけできまってしまうのである．$(\dot{X}, \dot{a})$ は群 $G = E\times_\omega\mathbb{R}$ の単位元 $e = (0, 0)$ から出る曲線 $(X(t), a(t))$ の初期方向を表すベクトル $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}$ であるから，これの全体を $G = E\times_\omega\mathbb{R}$ の e における接空間と考え，T_eG と書く．この場合の T_eG は $E\oplus\mathbb{R}$ という線形空間である．群の場合単位元の接空間は特別なものだから，T_eG は $\mathfrak{g}$ のようにも書かれる．$t = 1$ として，$\exp(\dot{X}, \dot{a}) = (\dot{X}, \dot{a} + \frac{1}{2}\omega(\dot{X}, \dot{X}))$ を $\mathfrak{g}$ から G への写像と考えたとき $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を**指数写像**とよぶ．見てわかるように，これは $(\dot{X}, \dot{a})$ を変数とみたときにも，微分可能 (C^∞-級) であり，しかも全単射である．積の定義 (11) より次の式が成立する：

$$\exp s(\dot{X}, \dot{a}) \exp t(\dot{Y}, \dot{b}) =$$
$$\left(s\dot{X} + t\dot{Y}, s\dot{a} + t\dot{b} + \frac{1}{2}\left(s^2\omega(\dot{X}, \dot{X}) + t^2\omega(\dot{Y}, \dot{Y}) + 2st\omega(\dot{X}, \dot{Y})\right)\right).$$

6.1.1　1 径数自己同型群

★例 3．例 1 の群 $E\times_\omega\mathbb{R}$ に，加法群 $\mathbb{R}$ が自己同型群として作用している例を考える．

全単射線形写像（線形同型）$\tilde{\rho}_\tau : E \to E$ で 1 径数群 $\tilde{\rho}_\tau\tilde{\rho}_{\tau'} = \tilde{\rho}_{\tau+\tau'}$ にもなっているものを考える．微分

$$AX = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\tilde{\rho}_\tau(X), \quad A : E \to E$$

を $\tilde{\rho}_\tau$ の**無限小生成元**とよび，$\tilde{\rho}_\tau = e^{\tau A}$ とか $\exp \tau A$ のように書く．

そこで，写像 $\rho_\tau : E \times_\omega \mathbb{R} \to E \times_\omega \mathbb{R}$ として $\rho_\tau(X,t) = (e^{\tau A}X, t)$ のようなものを考えてみよう．

補題 6.1 $\rho_\tau : E \times_\omega \mathbb{R} \to E \times_\omega \mathbb{R}$ が自己同型写像になる必要十分条件は，任意の $X, Y \in E$ に対し $\omega(AX,Y) + \omega(X,AY) = 0$ が成立することである．

証明 $\rho_\tau((X,a)(Y,b)) = (e^{\tau A}(X+Y), a+b+\omega(X,Y))$,

$\rho_\tau(X,a)\rho_\tau(Y,b) = (e^{\tau A}X + e^{\tau A}Y, a+b+\omega(e^{\tau A}X, e^{\tau A}Y)$

だから，自己同型写像になる必要十分条件は

$$\omega(e^{\tau A}X, e^{\tau A}Y) = \omega(X,Y)$$

であるが，両辺の微分 $\left.\dfrac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0}$ をとってみれば $\left.\dfrac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} e^{\tau A}X = AX$ だから，$\omega(AX,Y) + \omega(X,AY) = 0$ を得る．逆にこれが任意の X, Y で成立していると，

$$\frac{d}{d\tau}\omega(e^{\tau A}X, e^{\tau A}Y) = \omega(Ae^{\tau A}X, e^{\tau A}Y) + \omega(e^{\tau A}X, Ae^{\tau A}Y) = 0$$

となるから $\omega(e^{\tau A}X, e^{\tau A}Y) = \omega(e^{0A}X, e^{0A}Y) = \omega(X,Y)$ となる．□

上で与えた加法群 $\mathbb{R}$ の作用を使って，$E \times_\omega \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の**半直積群**とよばれるものを定義する．

★**例 4**．直積集合 $(E \times_\omega \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ に次のように積を入れる：

$$\begin{aligned}((X,a),\sigma)((Y,b),\tau) &= ((X,a)(\rho_\sigma(Y,b)), \sigma+\tau) \\ &= \bigl(X + e^{\sigma A}Y, a+b+\omega(X, e^{\sigma A}Y), \sigma+\tau\bigr).\end{aligned}$$

これで，$(0,0,0)$ を単位元とする群が作られていることは容易に確かめられるので，これを $(E \times_\omega \mathbb{R}) \ltimes_\rho \mathbb{R}$ と書き，$E \times_\omega \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の**半直積**

群とよぶのだが，記号が長いので，$\tilde{G}_{A,\omega}$ とも書くことにする．

$$((X,a),\tau)^{-1}=(-e^{-\tau A}X,-a+\omega(X,X),-\tau)$$

も容易であろう．$E\times_\omega\mathbb{R}$ は自然に $\tilde{G}_{A,\omega}$ の正規部分群になっている．

まず $\tilde{G}_{A,\omega}$ の性質を詳しく見よう．

●左変換　前と同様に左変換 $L_{(X,a,\sigma)}$ を定義すれば，その微分写像 $dL_{(X,a,\sigma)}$ は

$$\begin{aligned}dL_{(X,a,\sigma)}(\dot{Y},\dot{b},\dot{\tau})&=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(X,a,\sigma)(t\dot{Y},t\dot{b},t\dot{\tau})\\&=(e^{\sigma A}\dot{Y},\dot{b}+\omega(X,e^{\sigma A}\dot{Y}),\dot{\tau})\end{aligned}$$

となり，特に $dL_{(X,a,\sigma)}(0,\dot{b},\dot{\tau})=(0,\dot{b},\dot{\tau})$ となる．これは，$\mathbb{R}^2$ の部分が左変換で不変だということである．

●指数写像　1 径数部分群は $(X(0),a(0),\tau(0))=(0,0,0)$ で

$$\begin{aligned}&(X(t+s),a(t+s),\tau(t+s))=\\&\big(X(t)+e^{\tau(t)A}X(s),a(t)+a(s)+\omega(X(t),e^{\tau(t)A}X(s)),\tau(t)+\tau(s)\big)\end{aligned}$$

をみたすものだから，第 3 成分から $\tau(t)=t\dot{\tau}$ がわかり $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}$ を考えて，両辺の第 1 成分を比較し，積分すると $X(t)=\int_0^t e^{\xi\dot{\tau}A}\dot{X}d\xi$ を得る．これを第 2 成分に代入すると

$$\frac{d}{dt}a(t)=\dot{a}+\omega\Big(\int_0^t e^{\xi\dot{\tau}A}\dot{X}d\xi,e^{t\dot{\tau}A}\dot{X}\Big)$$

という式を得る．ω は双線形だから，

$$\omega\Big(\int_0^t e^{\xi\dot{\tau}A}\dot{X}d\xi,e^{t\dot{\tau}A}\dot{X}\Big)=\int_0^t\omega(e^{\xi\dot{\tau}A}\dot{X},e^{t\dot{\tau}A}\dot{X})d\xi$$

としてよい．もう一度積分し，補題 6.1 を使って



$$a(t) = t\dot{a} + \int_0^t \Big(\int_0^\eta \omega(e^{\xi\dot{\tau}A}\dot{X}, e^{\eta\dot{\tau}A}\dot{X}) d\xi \Big) d\eta$$
$$= t\dot{a} + \int_0^t \Big(\int_0^\eta \omega(\dot{X}, e^{(\eta-\xi)\dot{\tau}A}\dot{X}) d\xi \Big) d\eta$$

これを重積分の形にし，変数変換して

$$a(t) = t\dot{a} + \int_0^t \sigma\omega(\dot{X}, e^{(t-\sigma)\dot{\tau}A}\dot{X}) d\sigma$$

となるから，１径数部分群は

$$\exp t(\dot{X}, \dot{a}, \dot{\tau}) = \Big(\int_0^t e^{s\dot{\tau}A}\dot{X} ds,\ t\dot{a} + \int_0^t s\omega(\dot{X}, e^{(t-s)\dot{\tau}A}\dot{X}) ds,\ t\dot{\tau} \Big) \tag{12}$$

となる．特に，$\exp t(0, \dot{a}, 0) = (0, t\dot{a}, 0)$，$\exp t(0, 0, \dot{\tau}) = (0, 0, t\dot{\tau})$ である．難しく見えるが $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}$ を計算してみれば面倒な項は消えて $(\dot{X}, \dot{a}, \dot{\tau})$ が残る．これは群 $\tilde{G}_{A,\omega} = E \times_\omega \mathbb{R} \ltimes_\rho \mathbb{R}$ の単位元 $\tilde{e} = (0, 0, 0)$ から出る曲線 $(X(t), a(t), \tau(t))$ の初期方向を表すベクトルである．さらに，１径数部分群なのだから

$$(\exp t(\dot{X}, \dot{a}, \dot{\tau}))^{-1} = \exp(-t(\dot{X}, \dot{a}, \dot{\tau}))$$

である．１径数部分群は初期微分できまってしまうから，これの全体を $\tilde{G}_{A,\omega}$ の $\tilde{e}$ における接空間と考え，$T_{\tilde{e}}\tilde{G}_{A,\omega}$ と書く．この場合の $T_{\tilde{e}}\tilde{G}_{A,\omega}$ は $E \oplus \mathbb{R}^2$ という線形空間である．群の場合，単位元の接空間は特別なので，$T_{\tilde{e}}\tilde{G}_{A,\omega}$ は $\tilde{\mathfrak{g}}_{A,\omega}$ のようにも書かれる．

$$\exp : (\dot{X}, \dot{a}, \dot{\tau}) \longmapsto \Big(\int_0^1 e^{s\dot{\tau}A}\dot{X} ds,\ \dot{a} + \int_0^1 s\omega(\dot{X}, e^{(1-s)\dot{\tau}A}\dot{X}) ds,\ \dot{\tau} \Big)$$

を指数写像とよぶ．これは次の例で見るように，ω が歪対称のときには全単射にはならない．

★例 5． $\exp(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau})=(Y,b,1)$ を解こうとすると，

$$\int_0^1 e^{sA}\dot{X}ds=Y,\quad \dot{a}+\int_0^1 s\omega(\dot{X},e^{(1-s)A}\dot{X})ds=b$$

を解かねばならないが， $\int_0^1 e^{sA}ds=A^{-1}(e^A-1)$ だから $e^A=1$ となるような場合（たとえば $A=2\pi\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$）には解くことができない．このことは，原点から 1 径数部分群に乗ってどこにでも行けるわけではなく，行くためには 1 径数部分群を乗り換えなければならないことを意味する．

●**リー環**　一般のリー群 G で，$\mathfrak{g}=T_eG$，指数写像を $\exp:\mathfrak{g}\to G$ としたとき，リー括弧積とよばれる双線形写像を次式で定義する：

$$[W,W']=\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\mathrm{Ad}(\exp sW)W',\quad W,W'\in\mathfrak{g}.$$

例 4 の群では，少し面倒な計算をすると，

$$\begin{aligned}
&((X,a),\sigma)((Y,b),\tau)((X,a),\sigma)^{-1}\\
&=\Big((X,a)(e^{\sigma A}Y,b),\sigma+\tau\Big)\Big((-e^{-\sigma A}X,-a+\omega(X,X)),-\sigma\Big)\\
&=\big((X,a)(e^{\sigma A}Y,b)(-e^{\tau A}X,-a+\omega(X,X)),\tau\big)\\
&=\big(X-e^{\tau A}X+e^{\sigma A}Y,\\
&\qquad b+\omega(X,e^{\sigma A}Y)-\omega(e^{\sigma A}Y,e^{\tau A}X)+\omega(X,X)-\omega(X,e^{\tau A}X),\ \tau\big)
\end{aligned}$$

となるから，$(Y,b,\tau)=t(\dot{Y},\dot{b},\dot{\tau})$ とおいて，$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$ を計算すると

$$\begin{aligned}
&((X,a),\sigma)(\dot{Y},\dot{b},\dot{\tau})((X,a),\sigma)^{-1}\\
&\qquad=\big(-\dot{\tau}AX+e^{\sigma A}\dot{Y},\\
&\qquad\qquad \dot{b}+\omega(X,e^{\sigma A}\dot{Y})-\omega(e^{\sigma A}\dot{Y},X)-\omega(X,\dot{\tau}AX),\ \dot{\tau}\big).
\end{aligned}$$

さらに，$(X,a,\sigma)=s(\dot{X},\dot{a},\dot{\sigma})$ とおいて，$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}$ を計算すると，

$$(\dot{\sigma}A\dot{Y}-\dot{\tau}A\dot{X},\ \omega(\dot{X},\dot{Y})-\omega(\dot{Y},\dot{X}),\ 0)$$

となることがわかる．

$\mathrm{Ad}(\exp s(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau}))(\dot{Y},\dot{b},\dot{\sigma})$ を考えると，上の計算で

$$\begin{aligned}&\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\mathrm{Ad}(\exp s(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau}))(\dot{Y},\dot{b},\dot{\sigma})\\ &\quad=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp s(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau})\exp t(\dot{Y},\dot{b},\dot{\sigma})\exp(-s(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau}))\end{aligned}$$

を計算したことになるので，

$$[(\dot{X},\dot{a},\dot{\sigma}),\ (\dot{Y},\dot{b},\dot{\tau})]=(\dot{\sigma}A\dot{Y}-\dot{\tau}A\dot{X},\ \omega(\dot{X},\dot{Y})-\omega(\dot{Y},\dot{X}),\ 0) \quad (13)$$

である．これは $\tilde{\mathfrak{g}}_{A,\omega}=T_e\tilde{G}_{A,\omega}$ としたとき，$\tilde{\mathfrak{g}}_{A,\omega}\times\tilde{\mathfrak{g}}_{A,\omega}$ から $\tilde{\mathfrak{g}}_{A,\omega}$ への歪対称双線形写像である．さらに $\mathrm{Ad}(\exp t(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau}))$ は $\tilde{\mathfrak{g}}_A=E\oplus\mathbb{R}^2$ から自分自身への線形写像になっていると同時に，このリー括弧積も保っている．つまり $Z=(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau})$ として次が成立する：

$$\mathrm{Ad}(\exp t(Z))[W,W']=[\mathrm{Ad}(\exp t(Z))W,\mathrm{Ad}(\exp t(Z))W'].$$

この式の $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}$ をとれば，リー括弧積がヤコビ恒等式とよばれる

$$[W,[W',W'']]+[W',[W'',W]]+[W'',[W,W']]=0$$

をみたすことがわかる．$(\tilde{\mathfrak{g}}_{A,\omega},[\ ,\ ])$ を $\tilde{G}_{A,\omega}$ のリー環とよぶ．

注釈．計算を見ればわかるように，リー環の計算には単位元の近傍での計算ができればよい．しかも，単位元での２階の微分までしか使われていない．リー環は単位元の無限小近傍を，無限倍に拡大して眺めたときに見えてくる代数的性質である．上のように群の演算

がすべて微分可能になっている群をリー群という．リー群では微分方程式を解くという手段を用いて無限小の情報から有限の情報を引き出すことができるので，リー環の性質だけからかなり群の性質がわかってしまうという特徴がある．

6.1.2　ローレンツ内積

●ローレンツ内積　$\tilde{\mathfrak{g}}_A = E \oplus \mathbb{R}^2$ に次のような不定値計量内積（ローレンツ内積）を入れる：

$$\langle(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau}),\,(\dot{Y},\dot{b},\dot{\sigma})\rangle = -\frac{1}{2}\dot{a}\dot{\sigma} - \frac{1}{2}\dot{\tau}\dot{b} - \langle\dot{X},\dot{Y}\rangle. \tag{14}$$

$\langle\dot{X},\dot{Y}\rangle$ のほうは E 上の正定値内積とする．$a\tau = \frac{1}{4}(a+\tau)^2 - \frac{1}{4}(a-\tau)^2$ だから，上の不定値計量内積で $\tilde{\mathfrak{g}}_{A,\omega}$ は次で定義される正錐

$$V_+ = \langle(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau}),\,(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau})\rangle = -\dot{a}\dot{\tau} - \langle\dot{X},\dot{X}\rangle \geq 0, \quad \tau \geq 0 \tag{15}$$

を持つミンコフスキー空間となる．この不定値計量内積が両側不変，つまり $\forall g \in \tilde{G}_{A,\omega}$ に対して

$$\langle \mathrm{Ad}(g)(\dot{X},\dot{a},\dot{\sigma}), \mathrm{Ad}(g)(\dot{Y},\dot{b},\dot{\tau})\rangle = \langle(\dot{X},\dot{a},\dot{\sigma}),(\dot{Y},\dot{b},\dot{\tau})\rangle$$

となる条件を求めよう．

まず，次のように定義する．E から E への線形写像 A が**歪対称写像**であるとは，$\forall X, Y \in E$ で $\langle AX, Y\rangle = -\langle X, AY\rangle$ となることであり，その全体を $S(E)$ と書く．詳しい計算は省略するが，次のことがわかる：

定理 6.1　$\forall A \in S(E)$, $\forall c \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\rho_\tau(X) = e^{\tau A}X, \quad \omega(X,Y) = \langle AX, Y\rangle + c\langle X, Y\rangle$$

とおけば，(14) 式で与えられるローレンツ内積は両側不変となる．

これは次のことからわかるのである：

$$\langle[(\dot{Z},\dot{c},\dot{\mu}),(\dot{X},\dot{a},\dot{\sigma})],(\dot{Y},\dot{b},\dot{\tau})\rangle+\langle(\dot{X},\dot{a},\dot{\sigma}),[(\dot{Z},\dot{c},\dot{\mu}),(\dot{Y},\dot{b},\dot{\tau})]\rangle=0.$$

この計量内積を持つ群を $\tilde{G}_{A,c}$ と表す．（次で示すが，これで群 $\tilde{G}_{A,c}$ が有向正規順序群となる.）

一般に，群 G の部分群 H が与えられたとき，G 上に同値関係 $g\sim h$ を $gH=hH$ となることだとして定義する．これが本当に同値関係となることは容易に確かめられる．同値類の全体を G/H と書き（G の H による）**剰余空間**とよぶ．自然な写像 $\pi:G\to G/H$, $g\to gH$ は**射影**とよばれる．

正規部分群 N が与えられたとき，同値類の全体 G/N は自然に群になる．G/N を正規部分群 N による**剰余群**とよぶ．写像 $g\to gN$ は自然に $\pi:G\to G/N$ という準同型を引き起こす．これも**射影**とよばれる．

例 1 で出てきた群 $E\times_\omega\mathbb{R}$ は $\tilde{G}_{A,c}$ の正規部分群であり，これによる剰余群は $\mathbb{R}$ と同型の群である．

●**交換子群**　群 $\mathfrak{G}$ が与えられたとき $g,h\in\mathfrak{G}$ に対して $ghg^{-1}h^{-1}$ を $[g,h]$ と書き，g,h の**交換子**とよぶ．交換子全体で生成される $\mathfrak{G}$ の部分群を交換子群とよび $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ と表す．これは $\mathfrak{G}$ の正規部分群であり，$\mathfrak{G}/[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ は可換群である．

★**例 6**．例 4 に出てきた群 $\tilde{G}_{A,c}=(E\times_\omega\mathbb{R})\ltimes_\rho\mathbb{R}$ において $\mathbb{R}$ と同型な $\{(0,a,0);\ a\in\mathbb{R}\}$ はセンターである．このセンターによる剰余群（商群）$\tilde{G}_{A,c}/\mathbb{R}$ をある熱機関 $\mathbb{G}$ の状態空間と考えてみよう．

センターの群は零錐の上にあり

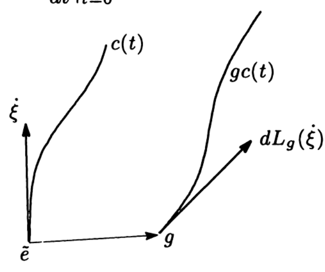
$$\omega_{\mathbb{G}}((\dot{X},\dot{a}),\dot{\sigma}) = \dot{\sigma} = \langle((0,1),0),((\dot{X},\dot{a}),\dot{\sigma})\rangle$$

とすれば $\omega_{\mathbb{G}} = d\sigma$ だから，センターの群を「時の流れ」と解釈でき，絶対温度は 1 ということになる．

$\forall g \in \tilde{G}_{A,c}$ に対し，$\tilde{\mathfrak{g}}_A = T_e\tilde{G}_{A,c}$, $T_g\tilde{G}_{A,c}$ をそれぞれ，群の元 $\tilde{e}$, g での接空間とする．$L_g : \tilde{G}_{A,c} \to \tilde{G}_{A,c}$ を左変換とし，これの微分写像 $dL_g : \tilde{\mathfrak{g}}_A \to T_g\tilde{G}_{A,c}$ を次のように定義する：

●**微分写像**　$\dot{\xi}$ を単位元 $\tilde{e}$ を始点とする C^∞-級曲線 $c(t)$ の初期微分，$\dot{\xi} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c(t)$ としたとき，$dL_g(\dot{\xi}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} gc(t)$ のことである．

(14) 式の不定値計量を $\tilde{G}_{A,c}$ 上に左変換でばらまけば，$\tilde{G}_{A,c}$ は各接空間にローレンツ内積が入った，ローレンツ多様体となる．



$V_+ = \{W = (\dot{X},\dot{a},\dot{\sigma}) \in \tilde{\mathfrak{g}}_A ; \langle W,W\rangle \geq 0, \dot{a}-\dot{\sigma} \geq 0\}$ とし，C_+ を $\exp V_+$ から生成される $\tilde{G}_{A,c}$ の部分半群とし，$C_- = (C_+)^{-1}$ とする．

命題 6.2　C_+ は有向正規錐，$(\tilde{G}_{A,c}, C_+)$ は有向正規順序群である．

証明　例 4 で与えた積の定義で σ,τ のところに注目すれば $C_+ \cap C_- = \{\tilde{e}\}$ は容易にわかる．ローレンツ内積の両側不変性より C_+ は正規錐であり，これより $C_+C_- = \tilde{G}_{A,c}$ もわかる．　□

$\tilde{G}_{A,c}$ と $\tilde{G}_{A',c}$ が同型だとして，この写像を $\mathrm{Ad}(\psi) : \tilde{G}_{A,c} \to \tilde{G}_{A',c}$ と書く．単位元 $\tilde{e}$ における $\tilde{G}_{A,c}$ の接空間は $\tilde{\mathfrak{g}}_A = E \oplus \mathbb{R}^2$ であったが，$\mathrm{Ad}(\psi)$ は微分を考えると，線形変換 $\tilde{\mathfrak{g}}_{A,c} \to \tilde{\mathfrak{g}}_{A',c}$ も引き起こす．

これも同じ記号で $\mathrm{Ad}(\psi):\tilde{\mathfrak{g}}_{A,c}\to\tilde{\mathfrak{g}}_{A',c}$ のように表す．$\tilde{\mathfrak{g}}_{A,c}$ 上に不定値計量内積で定義されている光錐 $V_+(A)$ は，群の演算だけで定義されているから $\mathrm{Ad}(\psi)$ はこれも保ち $\mathrm{Ad}(\psi)(\pm V_+(A))=\pm V_+(A')$ となる．$\pm V_+(A)$ は

$$Q_A(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau})=\langle(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau}),\,(\dot{X},\dot{a},\dot{\tau})\rangle>0$$

という非退化２次式で定義されているのだから，この集合を保つ線形変換 $\mathrm{Ad}(\psi)$ は $\mathrm{Ad}(\psi)Q_A=\alpha Q_{A'},\ \alpha\neq 0$ となるものに限られる．

●自己同型の例　$(X,a,\sigma)\to(e^tX,e^{2t}a,\sigma)$ は自己同型群である．これは零錐は保っているが時の流れ方を $a\to e^{2t}a$ のように変化させているので，零錐を定義している２次式は e^{2t} 倍されている．このようなものを**共形ローレンツ変換**とよぶ．

これに対し，$\forall\alpha\neq 0$ に対して

$$(X,a,\sigma)\to(X,\alpha^{-1}a,\alpha\sigma),\quad \tilde{G}_{A,c}\to\tilde{G}_{\alpha^{-1}A,c} \tag{16}$$

は A を変えるので自己同型ではないが，別の群への同型写像である．A は変化するが，不定値計量内積 (14) 式は保たれる．

次節ではこのようなものを純ローレンツ変換とよぶことになるが，自己同型ではないので考え方を少し変えなければならない．

6.2　共同描像

$\tilde{G}_{A,c}$ は１次元のセンターを持っており，これを $\mathbb{G}$ の心理的絶対時間とよぶことにしていた．これは自己同型では動かないのだから $\tilde{G}_{A,c}$ の自己同型群はあまり大きくない．さらに次のこともわかる：

補題 6.2　ω が非退化であるような，$(E\times_\omega \mathbb{R})\ltimes_\rho \mathbb{R}$ においては，自己同型は $E\times_\omega \mathbb{R}$ をも保つ．

このことから，$\tilde{G}_{A,c}$ の自己同型群は $\mathbb{R}\times O(d)$ だとわかる．

★例 7．例 4 に出てきた群はもう少し別の方向から構成することもできる．上では E の次元は一般 d-次元でよく，ローレンツ内積が最後に定義されたが，ここでは，記述を単純にするために，$\mathbb{R}^4$ に不定値計量 $Q(\boldsymbol{x})=x_0^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$ の入ったミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{1+3}$ から出発し，この座標系で群の構造を書くことを考える．

まず，正定値内積の入った 3 次元の線形空間（3 次元ユークリッド空間）を F として (x_1,x_2,x_3) をその座標関数とする．$A:F\to F$ は歪対称な線形写像とし，A を x_0 には 0 として働く行列として $\mathbb{R}^{1+3}$ に拡張したものを $\tilde{A}$ とする．

$F=\mathbb{R}^3$ とし，A を行列で表示して固有値の計算をすれば，

$$A=\begin{bmatrix}0 & a & c\\ -a & 0 & b\\ -c & -b & 0\end{bmatrix},\quad \det\begin{bmatrix}t & -a & -c\\ a & t & -b\\ c & b & t\end{bmatrix}=t(t^2+a^2+b^2+c^2)$$

だから，$A=0$ の場合以外，A の階数は 2 であり，0-固有ベクトル e_1（$Ae_1=0$ となる e_1）がある．具体的には $a^2+b^2+c^2=1$ として，

$$e_1=\begin{bmatrix}b\\ -c\\ a\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & a & c\\ -a & 0 & b\\ -c & -b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\ -c\\ a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad \text{であり}\quad \tilde{e}_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \pm b\\ \mp c\\ \pm a\end{bmatrix}$$

は $\tilde{A}$ の 0-固有ベクトルであると同時に $\mathbb{R}^{1+3}$ の null-ベクトルでもある．F 内での e_1 の直交補空間を E として $F=E\oplus\mathbb{R}e_1$ と分解し，新しく $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $\tilde{F}=E\oplus\mathbb{R}\tilde{e}_+$ を用意し，始めの $\mathbb{R}^4$ を $\tilde{F}\oplus\mathbb{R}\tilde{e}_-$ と表示する．これに応じて $\tilde{F}$ の元を $\tilde{X}=(X,\alpha\tilde{e}_+)$，もとの $\mathbb{R}^4$ の元

を $(X, \alpha\tilde{e}_+, \beta\tilde{e}_-)$ と表示する．しかし，$\tilde{e}_+$ の代わりに $\tilde{e}_-$ を採用しても話は同様に進むので，この選択に必然性はない．

$e^{\tau A}$ は $\mathbb{R}e_1$ では恒等写像で，$e^{\tau A}(X, \alpha e_1) = (e^{\tau A}X, \alpha e_1)$ だったが，$e^{\tau \tilde{A}}\tilde{e}_\pm = \tilde{e}_\pm$ でもあるから，$\rho_\tau \tilde{X} = e^{\tau A}\tilde{X}$ を考え $\mathbb{R}^4 = \tilde{F} \oplus \mathbb{R}\tilde{e}_-$ に半直積群 $\tilde{F} \ltimes_\rho \mathbb{R}$ の構造を入れる．群演算は次のようになる：

$$(\tilde{X}, \sigma\tilde{e}_-)(\tilde{Y}, \tau\tilde{e}_-) = (\tilde{X} + e^{\sigma A}\tilde{Y}, (\sigma+\tau)\tilde{e}_-).$$

$$\tilde{\rho}_\tau(X, \alpha\tilde{e}_+, \beta\tilde{e}_-) = (e^{\tau A}X, \alpha\tilde{e}_+, \beta\tilde{e}_-)$$

と定義しておく．

前と同様に $c \in \mathbb{R}$ を任意に選び，

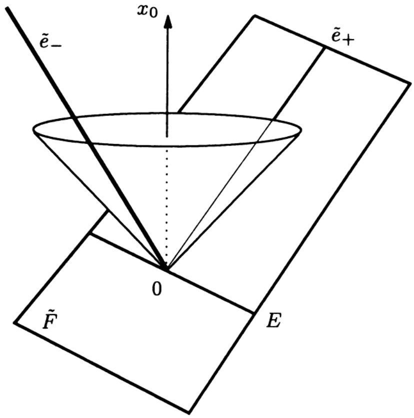
$$\omega(X, Y) = (\langle AX, Y\rangle + c\langle X, Y\rangle)\tilde{e}_+$$

として，加法群 E の中心拡大 $E \times_\omega \mathbb{R}\tilde{e}_+$ を $\tilde{F}$ の中に作りこれを $\tilde{G}_{A,c}$ とする．$\tilde{\rho}_\tau$ はこの群の上に自己同型群として作用する．これは $A = 0$ の場合もそのまま通用する．

半直積群 $(E \times_\omega \mathbb{R}\tilde{e}_+) \ltimes_{\tilde{\rho}_\tau} \mathbb{R}\tilde{e}_-$ は始めの空間 $\mathbb{R}^4$ の中に作られていることに注意する．これで例 4 と同型な群が得られるが，(14) 式で入れる両側不変なローレンツ内積は単位元（リー環）のところでは例 7 の始めに与えたミンコフスキー内積 $Q(\boldsymbol{x})$ である．

変わったのは群を構成するときに，任意に選べるパラメーターが $(A, c) \in S(E) \times \mathbb{R}$ から $\Lambda = \Sigma(F) \times \mathbb{R}$ に広がったことである．$\Sigma(F)$ は F の歪対称線形写像全体のなす線形空間である．

この群の演算を始めの $\mathbb{R}^{1+3}$ の座標で書くのは省略するが，$\tilde{G}_{A,c}$ の単位元のところでの null-方向（不定値計量内積で大きさが 0）は不定値計量内積の形から $\{(X, \sigma, \tau);\ -\sigma\tau - \|X\|^2 = 0\}$ である．これ

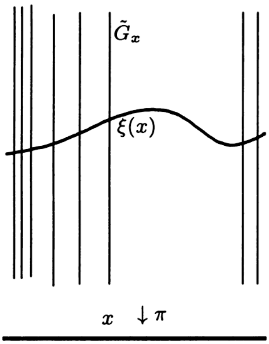


は開きの角度が 90° の直円錐が $\tilde{e}_+$-軸，$\tilde{e}_-$-軸に接するように入っているものである．これを零錐 (null cone) とよぶ．上図の 0 から真上に引かれる線が x_0-軸であり，これを中心軸として $\tilde{e}_\pm$ は零錐上を $\tilde{F}$ は零錐に接しながら (A, c) に依存して回転している．これは $(A, c) \to (0, 0)$ まで連続につながる．$A \neq 0$ であれば $\tilde{G}_{A,c}$ は群としては全部同型であり，$\tilde{G}_{A,c}$ に属する時の流れが零錐の中に現れていることになる．$A = 0$ の場合は $\tilde{G}_{A,c}$ はミンコフスキー空間で，それを加法群 $E \oplus \mathbb{R}^2$ とみたものであるが，$\Lambda = \Sigma(F) \times \mathbb{R}$ であったから $\tilde{G}_{A,c}$ は集合としては $\mathbb{R}^4$ であり，直和集合 $\coprod_{(A,c) \in \Lambda} \tilde{G}_{A,c}$ は $\Lambda \times F \times \mathbb{R}$ であり，ローレンツ内積は原点のところでは一定であり，群としての積の構造だけが (A, c) ごとに変化しているものになる．

命題 6.3　$\tilde{G}_{A,c}$ はミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{1+3}$ に加法とは異なる群演算 $*_{(A,c)}$ の入ったものである．

群演算の見え方は (A, c) に依存しているのだが，(A, c) は言語群 $\mathbb{G}$ に貼られたラベルのように考えるとわかりやすい．

記号が長くなるので，以下では $x=(A,c)$ と書くことにする．$\tilde{G}_x$ 単独では自己同型群は小さいが，$\tilde{G}_x$ は集合としてはすべて $\mathbb{R}^4$ と同じだから，各 x に対して $\tilde{G}_x$ の元 $\xi(x)$ を，写像 $x \to \xi(x) \in \mathbb{R}^4$ が連続となるように選び，これを直和集合 $\coprod_{x\in\Lambda} \tilde{G}_x$ の連続切断とよぶ．連続切断の全体を $\boldsymbol{\Gamma}(\coprod_{x\in\Lambda} \tilde{G}_x)$ と記す．$\forall\xi,\eta \in \boldsymbol{\Gamma}(\coprod_{x\in\Lambda} \tilde{G}_x)$ に対し，積 $\xi\eta$ を $\xi\eta(x)=\xi(x)\eta(x)$ で定義すると $\boldsymbol{\Gamma}(\coprod_{x\in\Lambda} \tilde{G}_x)$ は群になるので，これを



切断

$$\tilde{\mathcal{G}} = \boldsymbol{\Gamma}\Big(\coprod_{x\in\Lambda} \tilde{G}_x\Big)$$

と書き，多時間群とよんでおく．連続切断をいろいろ考えてみれば $\tilde{\mathcal{G}}$ の次元は ∞ であることがわかる．このような場面でよく使われる用語として，直和集合 $\coprod_{x\in\Lambda} \tilde{G}_x$ の元 X から X が属するラベルを対応させる写像 $\pi : X \to x,\ X \in \tilde{G}_x$ を**射影**とよぶ．さらに，$x \in \Lambda$ に対して射影像が x であるようなものの全体を $\pi^{-1}(x)$ と書く．無論 $\pi^{-1}(x)=\tilde{G}_x$ であるが，これを x の**ファイバー**（纖維）とよぶというきまりがある[23]．$\coprod_{x\in\Lambda} \tilde{G}_x$ 自身はファイバー $\tilde{G}_x$ を束ねたものなので，ファイバー束とよばれる．各ファイバーが群なので群束ともよばれる．細い導線がぎっしり詰まった電話のケーブルを想像してもらえばよい．ここでこのケーブルの切断面 (cross section) を想像しながら，上の連続切断をイメージすればよい．各 x に $\tilde{G}_x$ の単位元 e_x を対応させて得られる連続切断を単

23) 文科系の連中はこのようなきまりをうるさがるが，このような約束を取り付けていないと，言葉が多義的になりしまいには通じなくなるのである．

位切断とよぶ．これが $\tilde{\mathcal{G}}$ の単位元である．多時間群 $\tilde{\mathcal{G}}$ は $\tilde{G}_x$ の集団として構成されていて，それを言語群 $\mathbb{G}$ を通して見ると，$\tilde{G}_x$ のひとつが見えるのだと考えると都合がよい．

各 $\mathbb{G}$ がそれぞれの立場で $\tilde{\mathcal{G}}$ を考えるのだとしても，$\tilde{\mathcal{G}}$ 自身はすべての $\mathbb{G}$ について共通の群である．したがって，共通言語を作ろうとすれば群 $\tilde{\mathcal{G}}$ に関する言語を作らねばならない．

6.2.1　ローレンツ群

零錐（光錐）はどの $\mathbb{G}$ で見ても変わらないというのが特殊相対論の大前提だから，例 7 で与えた，$\mathbb{R}^4$ に不定値計量

$$Q(\boldsymbol{x}) = x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

の入った普通のミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{1+3}$ の線形変換 L で，この不定値計量を保つものを考える．これを**ローレンツ変換**とよび，その全体のなす群を**ローレンツ群**とよんで $O(1,3)$ と書く．この群は 6 次元の群である．ローレンツ群の部分群で単位元に連続的につなげることができる元の全体を $SO_0(1,3)$ と書く．これは $O(1,3)$ の開部分集合でもある．

これらの群は時空の対称性を記述しているとされていて，相対論は少なくとも $SO_0(1,3)$-対称性があるように書かれなければならないとされているのだが，これはいったいどういう意味あいのものか考えてみよう．

実は，$SO_0(1,3)$ は群 $\tilde{\mathcal{G}}$ に自己同型群として作用しているのであるが，中身をもう少し詳しく述べると，実は $SO_0(1,3)$ が作用しているのは群の集団 $\mathcal{G} = \coprod_{x \in \Lambda} \tilde{G}_x$ のほうで，しかも各ファイバーを別

のファイバーに同型写像で写すように作用しているのである．つまり，$\forall L \in SO_0(1,3)$ は $\mathbb{R}^4$ 上の線形写像だが，これが A を変化させ，$\tilde{e}_\pm$ を変化させるように働く．L に対して同相写像 $\varphi_L : \Lambda \to \Lambda$ と $\tilde{G}_x$ から $\tilde{G}_{\varphi_L(x)}$ への同型写像 ψ_L がある．これが効いて群 $\widetilde{\mathcal{G}}$ の自己同型を引き起こしているのである．

もう少し具体的に述べよう：$SO_0(1,3)$ の簡単な部分群としては x_0 を保つ線形変換で $\widetilde{SO}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(3) \end{bmatrix}$ の形のものがある．$SO(3)$ は回転群である．これは x_0 軸を中心とする回転で光錐は変化しないが，これに接する平面は x_0-軸の周りを回転する．一方，次の行列

$$\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で引き起こされる変換は純ローレンツ変換とよばれるが，これは各ファイバーを保つように作用する．上の純ローレンツ変換は $\tilde{e}_\pm$ で張られる空間に作用していると思うと，$\tilde{e}_- \to (\cosh t)\tilde{e}_-$ と変化させるが，A をそれに連動させて，$(\cosh t)^{-1}A$ と変えると，(16) 式で与えた同型写像となる．これは A を変えるので自己同型ではないが，別の群への同型写像である．A は変化するが，不定値計量内積 (14) 式は保たれている．次のことがわかっている：

補題 6.3 純ローレンツ変換と部分群 $\widetilde{SO}(3)$ とで $SO_0(1,3)$ は生成されている．

さらに，$SO_0(1,3)$ について次のことも知られている：

補題 6.4 $\forall S \in SO_0(1,3)$ について，正値対称行列 $P \in SO_0(1,3)$，および $K \in SO(3)$ が一意的に存在し，$S = PK$ と書かれる．しかも，

P の固有値は $e^{\tau}, e^{-\tau}, 1, 1$ である．

時の流れという単一のもの（いわゆる時間の矢）は自然界には存在していない．存在しているのは光錐のみである．全く同様，ローレンツ群なども自然界に存在しているのではない．これは互いの会話を成立させるため，つまり共通言語を生み出す戦略として各 $\mathbb{G}, \mathbb{G}'$ が共通して持つべき群なのである．

つまり，群 $SO_0(1,3)$ はすべての $\tilde{G}_x$ が共同して描く共同描像としての時空が持つべき対称性なのである．この場合，$\tilde{G}_x$ を実在と考えるか，$\coprod_{x\in\Lambda} \tilde{G}_x$ を実在と考えるか，これから Λ の部分を捨象して，例7で最初に与えた $\mathbb{R}^{1+3}$ を実在と考えるかはきまりはない．$\tilde{\mathcal{G}}$ のほうを実在とする考え方もある．

心理的絶対時間は違うが光錐は同じに見えている $\tilde{G}_x, \tilde{G}_{x'}$ で考えたとき，同型対応 $I_x^{x'} : \tilde{G}_x \to \tilde{G}_{x'}$ の単位元における微分写像を始めに与えた $\mathbb{R}^4$ 上の線形変換として書いたとき，これで生成される群が共形ローレンツ群である．

時空そのものを非可換正規順序群だとするとローレンツ不変性が破れるので不自然だという意見があるが，上のように考えれば解消する．また，この考え方は時空座標系の代数演算を非可換で考えるとき（後節参照）にも通用する．

大切なのは，共通描像に現れる元 H_* は，x ごとに $\tilde{G}_x$ の元 $:H_*:_x$ として表示されているもの[24)]つまり $\coprod_{x\in\Lambda} \tilde{G}_x$ の連続切断と考えられるものである．$:H_*:_x$ は共通描像の元 H_* のひとつの**表示**だと考えているということである．原理的には連続切断なら何でも共通描像といえるかもしれないが，ローレンツ共変性を持つ連続切断のみを

24) いささか奇妙な記号だが，9章で使う記号の使い方を先取りしている．

考える．個々の表示にまでローレンツ共変性を要求するものではない．そして，諸々(もろもろ)の物理現象は必ずしも共通描像に現れる変数だけで書かれているのではないと考えているのである．

しかし，心理的絶対時間などという変数は相対論には現れないから，これが特殊相対論に現れる x_0 や τ とどんな関係にあるべきかか考えてみよう．

光錐を (1,3) -型の不定値計量で表示したとき，この計量に関しては $\mathbb{G}$ の中で心理的絶対時間として絶対化されている t は零錐面を走るセンターの元だからこの不定値計量に関しては大きさを持たない．t を逆に τ のほうから見ると，錐の縁を流れるのが光子だというのだから，個々人の時空は光速が ∞ と意識されるように構成されているとも言えるから，はっきりした関係は作りにくい．

ところで，§5.3 で考えたように，時間 x_0 とエネルギー ε は正準共役とされる．そこで，あてずっぽうだが，心理的絶対時間のパラメーター t を表示のためのパラメーターとし，後のほうの (25) 式 (p.136) と命題 9.2 にあわせて

$$:e_*^{x_0\varepsilon}:_t = e^{t\varepsilon^2+x_0\varepsilon}$$

と考えてみる．すると，$f=e^{t\varepsilon^2+x_0\varepsilon}$ は

$$\partial_t f = \varepsilon^2 f = \partial_{x_0}^2 f$$

という式をみたしていることになる．エネルギーと運動量 $\boldsymbol{p}$ の間に成立しているとされるアインシュタイン (A. Einstein, 1879–1955) の関係式 $\varepsilon^2=\|\boldsymbol{p}\|^2+m^2$ と対応原理[25] を使って量子論の作用素にか

[25] 後の §10.3.1 参照．

えてみると，左の等式からシュレーディンガーの方程式，右の等式からクライン - ゴルドン方程式がでてきて

$$\partial_t f = (\Delta + m^2) f = \partial_{x_0}^2 f$$

となることがわかる．

共通概念として「剛体」を用いることで，そこからユークリッド空間と初等幾何学が，さらに「時間」を共通概念として絶対化して，そこから絶対時間・絶対空間とニュートン力学が浮上し，「熱」という概念を共通に受け入れられる概念として使って 古典熱力学はそこから普遍的概念として“絶対温度”と“エントロピー”の対を浮上させたように，特殊相対論は「光」を共通概念として，そこから絶対時空・宇宙時間とエネルギーの対を浮上させたのである．

7

勉強すると叱られる？

命題「A ならば B である」の対偶命題は「B でないならば A でない」である．これは前者が真なら後者も真である．なぜなら，「B でないのに A である」とすると「A ならば B である」が真なのだから三段論法で「B でないのに B である」という矛盾になるからである．同じことで，後者が真ならば前者も真である．つまり，命題「A ならば B である」と「B でないならば A でない」とは全く同値である．

では「叱(しか)られないと勉強しない」の対偶命題は何か？ これを論理命題「B でないなら，A でない」と読むなら，その対偶命題は「勉強すると叱られる」である．

実は，これは論理関係ではなく，**因果関係**を述べた命題，または**状態関係**（継続する時の流れのなかに置かれた状態の間の関係）を述べた命題なのである．

時間の前後をつねに考えれば因果関係や，状態関係は論理関係のように扱えるということは経験的に知られていることでだれも疑っていないのだが，「時」とは何かに答えられる人がいないのと同様に，その理由を明快に述べられる人など存在しないということに注意し

てもらいたい．上の場合，正しい対偶命題は時間の前後を考えて「勉強するのはその前に叱られたときである」（因果関係）とか，「勉強しているのは，叱られ続けているときだけだ」（状態関係）である．

これまで，数学は論理関係のみを扱うものであって，時間概念の入っている因果関係や状態関係を扱うものではないとされてきた．数学で因果関係や状態関係をいうときには，これを**常識的**に論理関係に置き換えて話を組み立てるのであるが，その置き換え方に一定のルールが確立しているわけではない．時間の前後に注意して使えば論理関係のように扱ってよいというのが一般的考え方で，数学はこの常識をよりどころとして因果関係や状態関係をも取り入れたような気持ちになっていたように思われる．しかし，この常識は「みなし逆元」のような場面（後出）によっては極めて非人道的なものになり，これが数学論理が敵視される原因にもなっている．

物理学は多くの場合物質を扱うのであるが，その物理学において本質的に難しいのは「何もない（真空）」という概念である．同様に，「行動」なるものを考えるときいちばん難しいのが「何もしない」という概念である．話すことはもちろん，見ることも聞くことも，考えることも思い浮かべることすらしない，時を食うことすらしない絶対的な意味での「何もしない」が人間にとって可能なことであるかどうか，座禅も組んだことのない私には知るすべはないし，これがどのようなものか説明することもできない．

しかし，ギリシャの思想に現れる「原子」と同じで，「何もしない」という行動があるのだと考えたほうが数学的表現は楽になるのである．そこで，これを象徴的に**無為**とよぶことにし，無為の全体を $\mathfrak{M}$ と書く．絶対的な意味での無為は「無為に時を費す」というときの

無為とは違い，時を食うこともしない無為のことである．何もしないということは，時を費やすこともしないことを意味するもの，神からの人間の独立宣言である．

このように無為 $\mathfrak{M}$ を絶対化して考えるのに対し，時の流れのほうは相対化して「時の流れ方は人によって違う」と考える．何かを絶対視しないと考えが進まないから，「時」を机上に持ち出すために無為を絶対化したのである．

ニュートンの絶対時間では「真の数学的時間はそれ自体その本性からして外界のいかなるものとも関係せず均一に流れる」とあるのに，なぜそう考えるのかは，無論相対論を意識するからであるが，時計は時刻の刻み方は指定するだろうが，時の流れ方を指定するものではない．こう言うと時の流れは本来一つなのだが，その見え方が人によって異なるのだと言っているように誤解されやすいが，ここでの考え方はむしろ逆で，自然界にはもともと時の流れという確定した一つのものは無く，時の流れという感覚こみで個人依存であり，その個人にとっては唯一絶対なのだと考えているのである．

7.1　時の流れ，無為

時の流れという概念のもとで語られているものは極めて多い，「永遠」「輪廻（りんね）」「天地創造」など宗教的なものもある．

太陽が東の空をこがし，小鳥がさえずって，昨日のごとく獲物を山野に追いあさる一日が始まる．強烈な太陽に支配される周期がなんの変化もなく繰り返している間は，おそらく人は何も感じまい．だが時には，愛する人が死に，部族間に争いが起こり，強大に見える

太陽までがかげりを見せる瞬間があろう．取り返しのつかない過去を背負ってこれまでどれだけの人々が大天空にまばたく星々を眺めあげたことだろう．そして，そういうときに，人の生き死にや愛憎になんの関心も示さずに冷酷に流れ続ける「時の流れ」を意識するのである．

無為とか時（とき）などという文学的色彩の濃いものに数学のようなものが触れようとすること自体に嫌悪感を持つ人は多いのだが，その理由を推察するに，そもそも時間概念を捨象して論理関係だけに注目している数学が，時の経過のなかにつねに置かれている現実や，因果関係を云々することを「小賢(こざか)しい」と感ずるからであろう．同様に，理論物理でよく使われる「最終理論」という言葉に対しても不遜(ふそん)な考え方だとして嫌悪感を持つ人は多いようだが，神ならぬ身であることを百も承知の者が「最終」と言うときのその深意は「もう有効な後がない」という「戦艦大和の最終出撃」のことなのである．

しかし，小賢しいと言われようと，不遜と言われようと考えてみなければ進みもしないのだから，「生兵法は大怪我のもと」と悟って自主規制するよりはるかに建設的だと思うべきであろう．

Calculus というのは微積分学のことである．実数連続体上の calculus は 19 世紀に完成している．その集大成は日本では『解析概論』（高木貞治）に見ることができる．これが今日の（日本での）大学教育の標準になっている．運動を記述しようとすると微積分は使わざるをえないのに，『解析概論』には時間とか運動に関する記述はない．数学は時間を扱わずにきたから，運動そのものは物理にまかせてしまっていたのである．素直に考えて，これはやはりおかしなことである．

7.1.1 因果関係 vs 論理関係

10 年ほど前に我々は普通の微積分の中で起こるある奇妙な事がらを見つけた．どのように奇妙なのかは [11], [12] に詳しく記したのでそちらを見てもらいたいのだが，おおまかに言えば

(a) 集合の元と思っていたものが，計算しているうちに２価の元に見えだす，

(b) 微積分の代数の中で，一つの元の逆元がいくつもある，

といった現象である．これらは論理的矛盾といったものではないし，注意して言葉を選べば回避できるものだから，数学の中ではあまり問題にされないが，一つに決まっていると思っているものが複数あると言っているので，好ましくない現象には違いないものである．しかもこれらは特別のことをしなくても，普通の微積分の中で起こるのである．これらの現象はいわば微積分学という software に初めから組み込まれている bug みたいなものなのである．

このような現象は普通の微積分の中で起こるものだから，微積分学を計算手段として使っている科学（ほとんどの科学）に必ず現れる不都合であるはずである．ところが現実にはこのような不都合を言う科学者はいない．それは当然で，微積分学の bug などという否定的概念が建設的概念を生み出すことはないのだから，こういうものは別の理解様式で理解され組織化されているはずなのである．

つまり，上のような不都合は微積分学の user にとっては（扱っている現象が自然に要求する禁則律で）区別されているのだが，純数学的な微積分の中ではそれが区別されずに縮退して現れている結果だと推測されるのである．しかも，その禁則律は数学の中の論理構造からは理解できる種類のものではなく，個々の現象が要求してい

るものである．そして user は因果関係を目安に禁則律を設定しているのである．

「どちらと考えても矛盾でないが，両方選ぶと矛盾になる」といった現象に出合ったときには両方選ぶことを禁止するルールがほしいのだが，どのような禁則律を書けば数学論理に矛盾しないかを user が用いている概念を通して考えなければならない，これが時間の謎を解くカギとなると考えるのである．

たとえば相対論的電子論では普通の微積分と一緒に4元数が使われている．場の理論の中では超対称性も普通の微積分と一緒に出てくる．これらが普通の微積分学と矛盾なく共存できるものであるらしいことは確かであるが，それはどうしてであろうか？ その理由がわかることと，時間というものがわかるということが，ほとんど同じことのように思えるのである．

数学と，数学の user の根本的違いは何であろうか？ 数学と，微積分の user の決定的違いは，数学では論理構造しか問題にしてこなかったが，user は論理構造より因果構造のほうが大切で，ほとんど因果関係で物ごとを考えているということである．つまり，user には必ず「時」が意識されているということである．現実の現象は「時」がおこなう行動だからである．時間を机上に持ち出すには「行動」なるものを論理的に考えることが必須なのである．

しかし，数学は論理的に閉じきろうとして努力してきた歴史がある．そして，論理は時間を捨象した結果，「時間」からは遠ざかってきたのである．

時の流れなど自然界には存在せず，在るのは光錐としての正の錐体のみだというのが相対論の結論だとしても，数学の user は個々人

の心理的絶対時間で因果関係を組織化しているのである．

ところで，一般力学系では時間変数とエネルギーとは正準共役（一種の双対）として扱われる．あきらかに因果構造のほうで考える微積分の user は（数学の論理構造には入っていない）時間とかエネルギーに対する仮定を意識的/無意識的に挿入し，因果関係を論理関係に置き換えて微積分学という数学を使っているのである．

だとすると，数学の側で論理的記述と，因果的記述を区別する方策がほしくなるわけで，数学の中でこの違いがいえるようになれば，それだけで上のような奇妙な縮退現象をかなりほどけるのではなかろうかと期待できるわけである．確率過程論のようなものは時間発展を扱っているようにみえるが，熱伝導方程式という数学形式の中に取り込まれている時間を扱っているだけだから，これを使えばなんとかなると思うのは早計である．

ではどのようにすればそれが可能であろうか．因果関係であれ論理関係であれそれが他人と共有できる（伝達性のある）真理になるためには言葉による論理的記述に変わらなければならないのであるが，このとき因果関係は何を犠牲にし，何を温存させて論理的記述に移行しているのだろうか．このすきまを見破ることで，逆に論理的記述と因果的記述の違いを浮き上がらせようとするのである．

そこで，言葉としての論理的記述と因果的記述の違いを考えてみると，因果的記述には動詞が多く使われていることがわかる．言葉としての動詞は動作/行動を言語化したものだから時間が意識されているのは当然ではある．そして，現実の行動はおこなってしまえば決してもとには戻せないものである．

たとえば，二つの変数を「入れかえる」のは数学では仮想的操作

である．しかし，現実に二つの変数が「入れ替わる」ようにするにはその運動を引き起こすハミルトン関数が必要である．これはその運動と正準共役の関係にあるハミルトン関数だが，それが多価の元という形で数学の中に登場する．

言葉は多義的に使われることが多いから統計的にはっきりさせるのは気が遠くなるほど難しいことで，この一文にその回答が書いてあると期待されては困るのであるが，因果的に物ごとを考える最初の練習として，行動の言語化（＝動詞）を数学的に考えることから始めてみようというのである．

だから考えるのは主に“行動の言語化”（動詞）がどのようなものかということの数学的考察であるが，言葉の使い方として「時の流れ」が意識されているものと，そうでないものとを明確に言い分けることから始めようというのである．遠大な計画には違いないが，因果関係を扱う user からヒントをもらい，これまでの数学の言語系をすべて時間を考慮する言語系に変えて考えるという方法を考えているのである．

この述べ方はかなり言語優先で，友人からは，まるで「サンチョパンサを引き連れて風車に向かって突進するドンキホーテのごときもの」と酷評されているが，哲学優先の述べ方はいつでもこの批判を受けているのだから本人はあまり気にしていない．要は哲学だけに終わらせない努力であると思っている．

結論らしい結論は今のところないのであるが，数学的に時間というものを考え始める手助けになればと思っている．

7.2 操作行動の数学模型

これまでは個人がおこなう行動のほうを主に考えてきた．しかし，多くの場合，動詞は自動詞ではなく，他動詞，つまり他の対象に対する「働きかけ」である．これを“作用”とよんでおく．動詞の目的語は多くの場合，安定した言語化を持っている「名詞」（ものの名前）である．現実には時の流れ方があきらかに違う二人が身近に居るということは，文学の世界でもないかぎり起きないだろうから，「名詞」の対応関係はわりと構築しやすい．

ものの名前（名詞）はすでに時空を超えて完全言語化されていると考えられるから，このような名詞化されている存在に対して，これらを変化させる行動は，それ自身言語化するのは容易で，このような行動は普通は行動といわずに「操作」「働きかけ」とよばれる．操縦，作用，変換などとよばれることもある．このような行動は操作の対象が $\mathbb{G}$ を通して時空を超えて完全言語化されておれば，それに対する変換として $\mathbb{G}$ で完全言語化される．

作用は合成によって自然に半群を形成する．逆に何かに作用している半群が与えられているとき，その半群の元を作用させることを“行動”と考えることができる．これらは打ち消しの効く行動と思える場合もあるだろうし，そうでない場合もある．

●**半群**　任意の二つの元 g,h に対して合成と称する gh が定義され，結合律 $(gh)k=g(hk)$ が成立している集合を，数学では**半群**とよぶ．$ge=eg=g$ となるような特別な元があるとき e を**単位元**とよぶ．我々が問題にするのは（群論を意識しているので）主に単位元を持つ半群である．しかし，半群の中には，0のような，何と合成しても0し

かでてこないような特別な元（零元）が入っている場合もある．これは逆元が考えられない元だが，このような元を持たない半群を考えることが多い．

話が抽象的になりすぎたから，もう少し具体的に，ある対象に対しておこなう「操作」という行動を連立方程式の掃出し解法を例として考えてみよう．これが数学でいう操作の典型的で最も素朴なものである．

我々の行動はつねにそれがおこなわれる場所とか時間とかいう情報を持っているのであるが，行動は行為でもあるから，その「行為の対象」という情報も持っている．そのとき数学では対象として四則演算のしっかりしたものを考えることが多い．

次のような n 元 n 連立 1 次方程式を解くことを考える：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{17}$$

(17) 式は行動（操作）の対象ではあるが，このように書かれているものはすでに時空を超えて同一視済みのものであるから，もう少し記号を用意して $\mathbb{B}$ とか $\mathfrak{M}$ にあたるものを書くことにする．

(17) 式から係数だけを取り出した $n\times(n+1)$-行列を**拡大係数行列**とよぶ．$M(n,n+1)$ を $n\times(n+1)$-複素行列の全体とする．考える行動は行基本操作として言語化されているが，$1\leq\forall i,j\leq n$ として次のような操作から生成される半群である：

(1)　$P(i,j)$: i-行と j-行を入れかえる，

(2)　$M(i,c)$: i-行目を $c\neq 0$ 倍する,

(3)　$S(i;a,j)$: i-行目に j-行目の a 倍を加える.

上の操作にはすべて打ち消し操作が考えられる．$P(i,j)P(i,j)$ や $M(i,c)M(i,c^{-1})$ は操作としては何もしない 1 と同等ではあろうが，操作はしているのだから 1 とは違うものと考えて，代数的には半群として考える．この半群を $S(n)$ と書く．$S(n)$ は (1)〜(3) の操作で生成されている．

$A\in M(n,n+1)$ に操作 $S\in S(n)$ をおこなって得られる行列を SA と書くと，行動の全体 $\mathbb{B}$，および無為全体 $\mathfrak{M}$ は

$$\mathbb{B}=\{(A,S,SA);\ A\in M(n,n+1), S\in S(n)\},\quad \mathfrak{M}=M(n,n+1)$$

である．$\mathfrak{M}$ の元 m は正確には $m=(A,1,A)$ のように書くべきであろう．操作される対象が時間で変化するものではないので，時間を意識しないで行動を考えることができ,「時の流れ」は無視（捨象）されている．すべての行動に打ち消し行動が考えられる．

ここで行動 $\alpha=(A,S,SA)$ に“時空を越えた同一視”をおこなって行動を言語化することを考える．これは α の始点 A を無為全体 $\mathfrak{M}$ のいたるところに平行移動して考えるということだから，数学的には A の部分を各成分が不定元であるような $n\times(n+1)$-行列 X として (X,S,SX) を考えるということである．これは $\mathfrak{M}$ を n-行 $(n+1)$-列にマス目だけが並んでいるものとして考えたと言ってもよい．こうして行動の始点を捨象することにより行動そのものが言語化され，そこに半群の構造が入る．(1)〜(3) は，その半群の生成元である．

さらにこの操作が，操作の対象である $n\times(n+1)$-行列になんの変化も与えなければ，広い意味で「何もしない」と解釈することにより操作の全体に群の構造が入る．こうして行動は言語化され，論理

化され群構造が浮かび上がるのだが，同時に群が作用する対象も浮かび上がる．

連立方程式の解は上の行基本操作で不変なのだが，その理由はこの操作がつねに逆の操作を持っていて，どこからでももとの形に復元できるからである．与えられた連立方程式に対して行基本操作を次々におこなって連立方程式そのものを最も簡単な形にする．たとえば次のような形にする：

$$
\begin{aligned}
x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n &= c_1 \\
0x_1 + x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n &= c_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & \\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + x_n &= c_n
\end{aligned}
$$

これが解である．これでわかるように，数学的に書かれているのは時間を捨象して言語化がおこなわれた後の姿である．

落ち着いて考えてみると，解が変わらないことの確信は論理的証明以前に，いつでももとに戻せるというところから来ているのである．群の概念が思考に論理性を持たせるのに必須というのはこのことであるし，教育学的にはこれしか頼りにするものがないのは理解できるだろう．若者は論理をそれほど信頼しているわけではなく，各自の行動を信頼しているのである．

7.2.1　みなし逆元

車の組み立てラインのようなところでは次々に流れてくる“同じもの”は（番号は付けるだろうが）言葉で表すときにはひとつの言葉になる．このひとつの対象にある操作を施す．このときその行動 $\mathbb{B}$ を表

す言葉はすでに時空を超えて言語化された言葉になっていてかなり安定している．考えてみれば現物に対しておこなう操作を，合理的，論理的に思考できる言葉のレベルに昇華させるためには，組み立てラインのような“同じ”ものが次々に流れてくる装置が要るのである．

同じという意味が安定していて，時の流れも安定している場面のみで通用する話ではあるが，このような対象に対して施す操作も完全言語化されている．

多くの場合，逆操作，打ち消しにあたる操作が可能である．しかし，現実の事物に対しては完全な逆操作，打ち消し操作などは存在しない．すべて，約束による「みなし逆元」である．

●手術 (operation)—非可逆模型—　みなし逆元によって論理性を獲得しているものの典型は医学である．手術台の上に患者が一人横たわっていて，数人の医師が何かの手術を施している場面を想像してもらいたい．手術は精密な医学用語でマニュアル化（言語化）された行動と“同じ”行動を患者に施すという行動の連鎖である．そして，ひとつひとつの行動は非可逆である．

無論，これを工場の組み立てラインでの作業工程と同列に扱うことはできないだろうが，動作，行動を表す言語の構造が似ていることは容易に想像できるであろう．

●リセット　この場合，逆操作，打ち消しにあたる操作がひとつひとつの対象に実際に可能な場合と，同じもののコピーを作っておいてリセットすることで打ち消しと思うのと，同じことかどうか考えてもらいたい．

特に手術のような場面では「同じ患者のコピーを作っておいてリセットする」などということは不可能だから，何らかの基準のもと

で同一と判断した患者の症状に見合って，これも何らかの基準のもとでマニュアルどおりと判断する操作をおこなうのである．

実際の場面での「打ち消し」は多様である．まして，これが国家間の戦争のような場面では，個々人の「生き死に」は問題にならず，単に兵力だけが問題になる．そして，これも数学論理には違いないのである．数学論理のこの部分の非情さを捉えて，数学的理性を敵視している人はかなり多い．

論理性を獲得するためにおこなう「みなし逆元」が，しばしば近代化，工業化の「負」の部分と受けとめられてきたことは確かである．しかし，これは「時間」を考えもしないで，とりあえず論理性だけを持たせて辻褄（つじつま）をあわせてしまうという価値判断が先行した政策として実行されたためなのである．しかももっと罪深いのは，これらが近代化の名のもとに「進歩」と称してなされたことである．しかし，多くの文明批判が上のような単純化されたリセットの概念に対してのみなされているのは困ることである．近代科学に対する批判の的は「時間」をまともに考えていないというところに絞られるべきだと思う．

●群論　実際の行動は絶対に取り返しのつかないものであるから，操作の半群の場合，単位元（「何もしない」）はあっても一般の元に対し逆元は考えられない．しかし，結果として対象に同じ変化を引き起こす操作は「同じとみなす」という同値関係を入れて逆操作を考えている．このような同値関係を入れた操作が全体として半群でなく群を形成しているのである．一般に単位元1を持ち，零元を持たない半群 S は仮想的に「逆元」を添加し，なにがしかの同値関係を持ち込めば群になるし，そのとき1と同値とされる元の全体が「最

小」になるようにして，構成される群が最大になるようにもできる．しかし，そのとき「何もしなかったのと同じ」とみなされてしまう行動（広義の無為）が，本当に無意味なものだけなのかは考えなければならないことである．みなし逆元は，数学的には半群の元に仮想的に逆元を考えて半群を群の中に写像するといったことをしているのだが，このやり方は非可換半群の場合は一意的でない．

一方，微積分学の代数を少し超越的に拡張したところでは，§9.1.2 で見られるように，一つの元に二つの逆元があるといったことが起こる．

因果関係は，数学の論理関係の中では時間の向きをどちら向きにとってもかまわないという縮退した形で現れるものと考えられているが，さほど単純なものではなく，数学の系の中では「どちらを選んでも矛盾ではないが，両方選ぶと代数的によい性質が保てなくなる」という形で，背反した双対なものとして入っている．しかも，その境界線はいろんなところに引けてしまうのである．

現今の数学や物理が「時間」まで責任を負わされるのは過剰ではあるが，問題を提起していないという批判は受けるべきでなのである．

8

個数概念は安泰か？

個数の概念と自然数の概念はほとんど同じとみなされていることが多いから，表題を「自然数の概念が安泰か」というように誤解されると困るが，数学的に定義される自然数と，我々が感覚的に使っている個数の概念が本当に同じものと思ってよいのかという疑問である．もしそこに疑問符がいっぱい入るのだとしたら，幾何学，そして数学がそこから何も汲み取らなくてもいいということにはなるまい．

数学が最底辺で基礎にしてきたのは自然数の概念である．これは successor をもとにして組み立てられた概念である．個数の概念とは無関係のものである．

数学は時間に関するものを扱ってこなかった．その理由ははっきりしていて，数学が扱ってきたものは，行動という観点からみると，時空を超えてすでに同一視済みの（静的な）もののみを対象にしてきたからである．しかし，一般に何かに作用している群が与えられているとき，その群の元を作用させることを単に対称性を記述するものでなく動的な“行動”と考えることもできる．

始終点のない世界線が何本あるかという概念なら，どの時の流れで見ても安定しているだろう．つまり，原理的に生成も消滅もしな

い存在に対してならそれらが動いて見えようと，見えまいと，どの観測者も同じ答えを書くであろう.

しかし，たとえばある時の流れに乗って n 回現れて消える行動を考えてみると，これはある $\mathbb{G}$ からは **1 個の同じもの**が n 回現れて消えたと認識されるだろうが，別の時の流れを持つ $\mathbb{G}'$ から見れば違う n **個のもの**が 1 回ずつ現れて消えたとも見えるのであり，「何個だったか？」という問いには違う答えを書くであろう.

個数は本当に物理学上の安定した概念なのだろうか．上の思考では $n=1$ の場合はどちらも同じことになると言うかもしれないが，その 1 個が動いているという表現まで加わったらどうであろうか.

今日では時の使い方が進歩して 10^{-6} 秒くらいを 1 単位としてかなり自由に時を操るようになってきているし，光ケーブルを使って通信もおこなっている．これがもう少し進歩して 10^{-10} 秒くらいを 1 単位として扱う時代になったとき，それでも個数概念は変わらないのだろうか？

平面上に発光ダイオードがびっしり並んでいるものを考え，どこかの一列が次々に瞬間発光するとする．するとそれは一個の光点が動いていると意識されるかもしれないが，よく見ると，n 個が次々に発光しているのである．この場合「光点の個数は？」という問いにはどう答えればよいだろうか．暗室の中に入ると光点が上下に振動していて一本の棒に見えるものも，首を左右に振りながら眺めると，丸が描かれていることがわかるといったものは，人間の目の残像とか錯覚を使うだまし絵だが，我々の思い込みでだまされていることはないのだろうか.

自然数は個数概念のことで，原始的に万人が認めるものだという

理解が一般的なのかもしれないが，量子論でよくいわれる粒子と波動の二重性にまで思いをめぐらしてみれば，この部分も再考の余地があることがわかると思う．真空の一点から電子と陽電子が対発生する．保たれているのは粒子の個数ではなく，電荷の総量である．個数とはいったい何であろうか？

時間は物理概念であるが，数学上の概念ではなかったのと同様に，個数概念は数学概念ではあるが物理概念ではないのだろうか？

そう考えてしまうと困るのである．物理では因果関係を正しく論理関係に置き換えるために「実験の再現可能性」が要求される．これは前に述べた「時の流れに乗って同じ行動を何回も繰り返す」という意味ではなく，「同じもの（コピー）をたくさん作ってリセットできる」という意味である．この場合「同じもの」の意味が観測者に依存していては困るはずである．

数学ではこの部分は「逆元を作る」あるいは「もとに戻す」という無機的な言い方になる．この二つの行為を全く「等価」なものとみなすことで因果関係は正しく論理関係に置き換えられると考えられてきたように思う．ところが，注意深く因果関係をどのようにして論理関係に置き換えているかを観察してみると，これは「時」というものをどのように考えているかに関係して決して単純なものではないのである．

同じものをたくさん作るといっても実際には完全に同じものなど作れないし，それも無制限に作れるわけがない．この言葉も理想化して述べないと数学的な言葉にはならない．絶対的に同一のものが複数あるというのは論理的矛盾であるが，同一視の過程で齟齬(そご)が生じて，区別できないものがたくさんできるのだとすれば論理的矛盾

にはならない．しかし，数学の論理がこのようなものを否定したらどうなるであろうか．矛盾が出ないためには数学の中にそのようなものが備わっていなければならないのだが,「区別できない複数のもの」とは数学的にどのような概念なのだろうか？

これは数学的にも考えが分かれるところで，後の§9.2で述べる多価の元というものが数学的にみた場合のこの例であると（私は）主張するが，このような考え方はまだ数学の中では広く受け入れられてはいないことを最初に断っておかねばなるまい．

8.1 回数としての自然数の概念

どの時の流れであれ，時の流れというものがあると，それをもとに普遍性のある言葉がひとつ作られる．まずそれを述べよう．

●同じ行動の繰り返し 時の流れ $\tilde{\varphi}_t$ があると，繰り返せる行動という概念が生まれる．これは行動 α の始点 m，終点 m' を考え，それを $\alpha = m\alpha m'$ のように表示したとき，$\alpha = m\alpha\tilde{\varphi}_\varepsilon(m)$ のように，同じ時の流れの上に始点終点が乗っている行動 $\alpha \in \mathbb{B}$ である．

すると $\alpha\tilde{\varphi}_\varepsilon(\alpha)\tilde{\varphi}_{2\varepsilon}(\alpha)\cdots\tilde{\varphi}_{n\varepsilon}(\alpha)$ のような行動は，最も素朴な意味で同じことを何度も繰り返すという行動になると思われる．これはいわば時間方向だけの平行移動だけで“同じ”と言っているのだから，行動自身は言語化されていなくても周期的に繰り返されておれば「同じことを何度も繰り返す」という意味は確定する．

ペアノ (G. Peano, 1858–1932) が自然数の公理系を作るときに採用した**後者** (successor) の概念は，平たく言えば「$\cdots$ の次」という意味で，次々に繰り返すということだから基礎にしているのは個数で

はなく,「時」の感覚だと思われる.（高木貞治:『数の概念』, 岩波，1949 参照.）

国際取り決めでの 1 秒の定義も，宇宙にあまねく存在しあまり他の影響を受けにくい基底状態のセシウム原子が**同じことを何回繰り返したか**で時間を計測している.

時の流れに乗って「同じことを n 回繰り返す」行動は言語化され，しかも,「回数」というものも言語化される．その意味で，回数という自然数概念は時の流れを持つ行動族の中でまっさきに言語化されるものである.

手拍子，まりつきなどなど，子供のころにどのようにして数をかぞえるようになったかを思いだしてもらえば，時の流れは自然数の形成に密着しているのがわかるであろう．自然数の形成には一定間隔で同じことを繰り返すというリズム感覚が大切なのである.

そして，数学はここから，すべてに定義を与え，論理だけで進む. 自然数の全体を $\mathbb{N}$ とする．(k,ℓ) といった自然数の組全体を $\mathbb{N}^2$ と書き，$\mathbb{N}^2$ に同値関係 $\sim$ を

$$(k,\ell)\sim(k',\ell') \iff k+\ell'=k'+\ell$$

と定義し，その同値類の全体を**整数**とよぶ．このようにして論理だけで，有理数から実数 $\mathbb{R}$，複素数 $\mathbb{C}$ にいたる，おなじみの数学をすべて安定言語化された姿で登場させることができる．さらに $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合に対して，面積とか体積も定義する．極限概念を持ち込んで微積分も作られる．あるパラメーターを時間とよぶこともある．しかし，これはあくまで $\mathbb{R}^n$ 内に表示されたものに対しての話だから時間は捨象されている.

8.1.1　回数と個数の違い

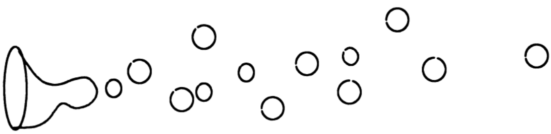
自然数概念の形成にはビー玉，おはじきなどなど個性がなく単に個数しか意味のないような“同じもの”がたくさんあることが根底にあるとされることが多いし，掛け算のような算法を考えるときには個数で考えるほうが便利なのだが，**全く区別のない同じもの**が複数あるというのは同一人物が二人居ると言っているようなもので，論理的には考えにくい．同一のものが二つあるというのは論理的矛盾であるが，日常会話では平気で使われている．これはどのような意味あいで使われているのだろうか？

つきつめると，我々が素朴に持っている個数の概念と自然数の概念とが同じものであるという論理的証明などは**どこにもない**のである．数学の中で展開される世界は現実の世界と似ているかもしれないし，また似てくるように努力もされているのだが，純論理的にはなんの関係もないのである．

●波の個数？　物理でいう素粒子は個数はいえるとしても互いの区別はつかないものである．これを理解するには，物理で素粒子といっているものは，我々が素朴にいう粒子のことではなく，本当は粒子とか波動とかいう古典的描像を超えたものである．素粒子の特徴はこれが個々の区別ができない多数のものであるということである．このことと粒子性と波動性という二重の性格は一体である．では，そのようなものは数学的に可能なのであろうか？ もし，数学がこれに“no”を突きつけたら物理はどうなるだろうか？

常識的には，数学の側にこれを受け入れる論理/事実が備わっていなければならないのだが，実はそれがあまりはっきりしていないの

である．波も波長が極端に短くなると粒子性を示すと言われているが，これの数学的解析は難しく完全にでき上がっているわけではない．ソリトンとよばれる孤立波はばらばらに在るときには個数もいえて粒子のように思えるが，衝突後もどちらがどちらへ行ったのかがわかるような印を付けて追跡することはできない．つまり，ひとつひとつに個性はない．光子とよばれているものがこのような孤立波だとするなら，ほとんどいたるところに存在できなければならないのだが，ソリトンはさほど自由な存在には見えない．

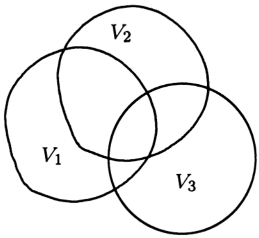


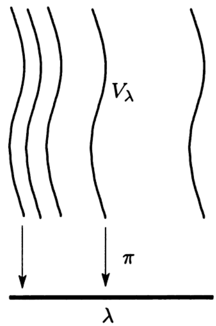
お祭りの夜店で売っている石鹸液の付いた輪を吹くとシャボン玉のシャワーが作れる．数学的シャボン玉ひとつひとつは平均曲率一定の曲面である．これを変分法の問題として数学的に扱おうとするときに直面する問題は，「自然は多様体であるかどうかを気にしないで変化する」ので，特異点を経由してシャボン玉の個数などが変化するところまで扱わねばならなくなるということである．難しい原因は位相が変化する現象を同時に机上に乗せる記述法がないからなのである．つまり，我々は最も見たいものを数学的に言語化できていないのである．これは，多様体を基礎にして物ごとを考えるという癖を我々がまだ持っていることの弊害と思われるのである．

ではどうすればよいのか，と問い詰められたら答えはないのだけど，一つの多様体を考えるのではなしに，多様体の族の振る舞いを見ようとする動きはある．見方はさまざまだが，時間を考えるときに決定的と思われる考え方はまだ出ていないような気がする．

8.2 多様体社会学の共同描像

前のほうで多様体なるものを局所座標系の貼り合わせとして定義した．このときは各局所座標系が個々人で，多様体自身はその集団であると説明した．この場合の集団はたとえば下図左側の V_1, V_2, V_3 のようなものである．





ところが，非可換時空のところで考えた集団は個々のものは同型であるが，その集団は上の右図のようにパラメーター付きで考えられている．

しかし，熱機関社会では個々の状態空間を特性関係式で定義された多様体として考え，その集団としての社会もやはり一つの熱機関と考えるものである．これは個々の多様体の（温度だけを別にした）直積多様体を一つの多様体とみなしているということである．いずれの場合も個々のものには印が付いている集団が扱われている．

TFT (topological field theory) までくるとある種の条件をみたす多様体全体のなす社会を考えることになる．ここでは各多様体が持っている位相不変量が互いに対話可能な共通概念である．位相不変量と述べていかにも数量のようにいったが，これは必ずしも数量を意味しない．群の元であったり，あるいは群そのものであったりする

が，この中に Index Theory という形で自然数/整数の概念が最も基本的なものとして入り込んでいる．このように，多様体集団の社会を考えるときの考え方はいろいろあるが，いずれの場合も，共有できる概念が何かということが重要問題となる．世界の再構築を考えれば個数の概念から再構成されるべきなのは確かだが，そのとき，時間を意識している人とそれを捨象している人を一緒にして議論すると，結局，数学の側からだけの発言になってしまうということに物理学者は気づくべきである．TFT そのものが時間を考えさせる戦略を生み出しはしないからである．TFT には熱力学の第 2 法則にあたるもの，エントロピー増大の法則にあたるものは組み込まれていないのである．

時間を考えないで「最終理論が書ける」と思うのは，時間を考えないで相対論がわかると言っているようなもので矛盾した思考である．最終理論には「時間」に答えるという気の遠くなるような課題が付いているはずである．

9

同一人物が二人居る？

ピカソの晩年の絵を眺めていて正直思うことは「どうしてこれほどまでデフォルメするのだろうか？」である．評判の高い絵ではあるのだが僕にはどうしても醜悪に見えてしまうのである．いったい「美」とは何なのだろう？

しかし，数学で deformation を考えるようになって少し理解できたような気がしてきた．「美の正体」を知ろうとするのは絵描きの本能みたいなものであろう．本質を失わずにどこまでデフォルメできるかを追究することでその本質に迫ろうとしているのだと思うようになった．

同一人物が二人居るのはあきらかに困ることだろうが，区別できない同じものが複数在ると考えなければならないような対象が数学の中にも存在している．こんな一見矛盾のようなものが，どんな姿で数学の中に現れているかを少し手前から説明しよう．

9.1　代数表示のデフォルメ

点集合で物を考える癖が残っている頭で，表示の変形を考えるのは案外難しいが，数学的表示をしようとすれば，なにかよく知って

いるものを利用してその表示を借りて表示しなければならない．いわば，既成の母屋の軒下を借りてその表示を利用して述べたいことを表現するのである．

初めのほうで，束縛運動をおずおずと持ち出しておいて，結局は多様体論が古典的微分幾何学を乗っ取ってしまったように，うまくいけば，最後には母屋のほうも乗っ取れるかもしれないのだが，初めからそのような顔をしていては嫌われるだけである．なにしろ母屋は数学の基礎中の基礎，多項式からなる母屋である．この場合，母屋の数学は表示のために借りるだけだから，それが基礎にしているものが何であるかを詮索（せんさく）したりはしない．

9.1.1　多項式環の積の変形，相互変換

数学的設定を少し手前から始める必要があるので，まず記号を準備する：ζ は複素平面 $\mathbb{C}$ の座標関数，$\mathbb{C}[\zeta]$ を ζ の多項式の全体，$Hol(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上の複素正則関数全体の集合とする．ここでの計算法やさまざまな公式は既知とする．これが母屋である．計算には次のような簡略化した記号を用いる：$\partial_\zeta = \dfrac{d}{d\zeta}$,　$\partial_\zeta^k = \dfrac{d^k}{d\zeta^k}$.

$\mathbb{C}[\zeta]$ に $\tau \in \mathbb{C}$ をパラメーターとして次のような積を定義する：

$$f *_\tau g = \sum_{k \geq 0} \frac{\tau^k}{2^k k!} \partial_\zeta^k f \partial_\zeta^k g \quad \left(= f e^{\frac{\tau}{2} \overleftarrow{\partial_\zeta} \overrightarrow{\partial_\zeta}} g\right) \tag{18}$$

括弧内の書き方は後で非可換変形を考えるときに便利な記号だが，いまは気にしなくてよい．この公式は一方が多項式であれば計算できるものだが，軒下に母屋で普通使われている積とは違う積を入れただけのものである．特に $\tau = 0$ のときは母屋で使われている積と同じものである．τ を変形のパラメーターと考える．

（計算例）　$\zeta*_\tau\zeta=\zeta^2+\frac{\tau}{2},\quad \zeta^2_{*_\tau}*_\tau\zeta=\left(\zeta^2+\frac{\tau}{2}\right)*_\tau\zeta=\zeta^3+\frac{3\tau}{2}\zeta.$

$\mathbb{C}[\zeta]$ にこの $*_\tau$-積を入れたものを $(\mathbb{C}[\zeta];*_\tau)$ とする．この積が可換 $f*_\tau g=g*_\tau f$ であることは定義式の形からすぐわかるが，総和記号下で計算するのに慣れておれば，新しい積 $*_\tau$ が結合律

$$(f*_\tau g)*_\tau h=f*_\tau(g*_\tau h)$$

をみたしていることも容易にわかる．

このように積の公式を具体的に与えると，計算は自然に多項式を超えた超越的なところまで拡張される．$e^{2i\zeta}$ は多項式ではないが，テイラー展開を知っておれば次式は容易だろう：

$$e^{2i\zeta}*_\tau f(\zeta)=e^{2i\zeta}f(\zeta+i\tau). \tag{19}$$

しかし，$\zeta^n_{*_\tau}=\zeta*_\tau\zeta*_\tau\cdots*_\tau\zeta$ と書けば，任意の元は

$$a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2_{*_\tau}+\cdots+a_n\zeta^n_{*_\tau}$$

のように書かれるのだから，$(\mathbb{C}[\zeta];*_\tau)$ は普通の多項式環 $(\mathbb{C}[\zeta];*_0)$ と全く同型のものである．その同型写像は

$$e^{\frac{\tau}{4}\partial_\zeta^2}=\sum_k\frac{\tau^k}{4^k k!}\partial_\zeta^{2k}:(\mathbb{C}[\zeta],*_0)\to(\mathbb{C}[\zeta],*_\tau) \tag{20}$$

で与えられる．実際に計算して $e^{\frac{\tau}{4}\partial_\zeta^2}(f*_0g)=(e^{\frac{\tau}{4}\partial_\zeta^2}f)*_\tau(e^{\frac{\tau}{4}\partial_\zeta^2}g)$ が成立していることを次の式を参考にして確かめてもらいたい：

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{\tau}{4}\partial_\zeta^2\right)^k(f*_0g)=\sum_{p+q+r=k}\frac{\tau^r}{r!2^r}\partial_\zeta^r\left(\frac{1}{p!}\left(\frac{\tau}{4}\partial_\zeta\right)^p f\right)*_0\partial_\zeta^r\left(\frac{1}{q!}\left(\frac{\tau}{4}\partial_\zeta\right)^q g\right).$$

$I_0^\tau = e^{\frac{\tau}{4}\partial_\zeta^2}$ は代数の同型写像だったから

$$I_\tau^{\tau'} = I_0^{\tau'}(I_0^\tau)^{-1} = e^{(\tau'-\tau)\frac{1}{4}\partial_\zeta^2} : (\mathbb{C}[\zeta], *_\tau) \to (\mathbb{C}[\zeta], *_{\tau'}) \qquad (21)$$

も代数の同型写像である．これを**相互変換**とよぶ．

相互に変換され $I_\tau^{\tau'}$ で結ばれているものを**同じもの**と考えるのである．だいたい $(\mathbb{C}[\zeta]; *_\tau)$ を個人の言語系 $\mathbb{G}$ のように思い，τ を $\mathbb{G}$ に貼られたラベルと思うとよい．相互変換は $I_{\mathbb{G}}^{\mathbb{G}'}$ のようにも思ってもよい．この場合は相互に変換されるものは全体として一つのものを表していると考えるので，共通言語化されたものと呼んでおく．

$\mathbb{C}$ 内の曲線 $\tau(t)$ が与えられたとき $f(t,\zeta) = I_{\tau(0)}^{\tau(t)}(f)$ は $\dot{\tau}(t) = \frac{d}{dt}\tau(t)$ として次の偏微分方程式ををみたす：

$$\partial_t f(t,\zeta) = \frac{1}{4}\dot{\tau}(t)\partial_\zeta^2 f(t,\zeta), \quad f(0,\zeta) = f(\zeta). \qquad (22)$$

(22) は初期条件 f を勝手に与えたのでは解けない．また，t を複素変数とし，$t=\tau$ とすると，(22) は

$$\partial_\tau f(\tau,\zeta) = \frac{1}{4}\partial_\zeta^2 f(\tau,\zeta), \quad f(0,\zeta) = f(\zeta) \qquad (23)$$

のような熱伝導型の微分方程式とも思える．表示のパラメーター τ が前に書いた熱伝導の式 (8) では t であり，ζ が空間変数 x^i に相当している．この式と (8) とを見比べてもらいたい．多項式の変数と表示のパラメーターの関係は光錐と心理的絶対時間の関係と同じにみえるのである．こう思っても一般に解けるものではないが，問題のいきさつからいくつかの解は微分方程式を解くまでもなくわかっている．それを以下で考える．

●積公式の変形は表示の変形をうながす　物ごとはすべてさまざまな表示を持つ．同じものがさまざまに見えるのである．表示や思考

を固定してしまうことが諸悪の根源である．つねに異質のものを受け入れる懐の深さがなければ，新しいものは認識されない．数学というものはそういう考え方を培うためのものであったはずである．

●多項式の場合　相互変換の定義から，$a\zeta+b$，$2\zeta^2+\tau$，$2\zeta^3+3\tau\zeta$ は (23) の解である．これを $:a\zeta_*+b:_\tau$，$:2\zeta_*^2:_\tau$，$:2\zeta_*^3:_\tau$ のように書く．一般に $P_n(\zeta,\tau)=\sum\frac{n!}{4^k k!(2k)!}\tau^k\zeta^{n-2k}$ も (23) の解であるが，これを $:\zeta_*^n:_\tau$ と表す．

●指数関数　同様に，指数関数については $I_0^\tau e^{2a\zeta}=e^{2a\zeta+a^2\tau}$ であることがわかるので，これを次のように表す：

$$:e_*^{s\zeta}:_\tau\ = e^{\frac{1}{4}s^2\tau}e^{s\zeta}=e^{\frac{1}{4}s^2\tau+s\zeta} \tag{24}$$

次の命題を見て，これまでの話との対応を察知してほしい：

命題 9.1 多項式 $p_*(\zeta)$，および指数関数 $e_*^{a\zeta}$ は共通言語化されている．

一般に，ひとつの多項式 $f(\zeta)$ に対して相互変換を使って $f_\tau(\zeta)=I_0^\tau(f)$ とすれば $\{f_\tau(\zeta);\,\tau\in\mathbb{C}\}$ という多項式の集団が得られる．この集団 $\{f_\tau(\zeta);\,\tau\in\mathbb{C}\}$ を $f_*(\zeta)$ のように書き，これを一つの元のように考えたものを **q-number 関数**とよぶことがある．単に表示を変えているだけだから，$f_*(\zeta)$ の世界は普通の多項式の世界と代数的にはなにも変わらない．$\tau=0$ の所から相互変換 I_0^τ で変換して考えればよいのだから，これは $\mathbb{C}[\zeta]$ と代数的に同型である．伝統的には，これ以上なにも詮索する必要はないとされていた．

さらに (24) 式のように

$$:f_*(\zeta):_\tau = f_\tau(\zeta) \tag{25}$$

のような記号 $:\bullet:_\tau$ を用意し，これで個別のものを表すことにする $:f_*:_\tau$ を f_* の τ-**表示**と考えるのである．つまり $:e_*^{s\zeta}:_\tau$ は $e_*^{s\zeta}$ の τ-表示である．記号の使い方を敷衍(ふえん)して

$$:a\zeta_* + b:_\tau = a\zeta + b, \quad :2\zeta_*^2:_\tau = 2\zeta^2 + \tau, \quad :2\zeta_*^3:_\tau = 2\zeta^3 + 3\tau\zeta$$

のように書いてよいであろう．これで記号 $:f_*:_\tau$ と書いたときの f_* の意味は理解してもらえると思うが，要するに τ は個人依存の $\mathbb{G}$ とも，その $\mathbb{G}$ の元とも考えているので，時空を超えた同一視をおこなって言語化されたものに付けたラベル（言語）と思ってもよいし，大自然の時の流れから相互変換を通じて共通言語化されたイデーだと思ってもよい．注意してほしいのは，考え方は変えているが，計算はすべて母屋でおこなっている計算をそのまま使っているということである．したがって $f_\tau(\zeta)*_0 g(\zeta)$ のような計算も意味がある．

積公式 (18) は多項式だけでなくもっと広いところに拡張される．次の第 1 のものは容易，第 2 のものはテイラー展開が収束しておればあきらかであろう：

$$e^{2a\zeta} *_\tau e^{2b\zeta} = e^{2(a+b)\zeta + 2ab\tau}, \quad e^{2a\zeta} *_\tau f(\zeta) = e^{2a\zeta} f(\zeta + a\tau). \qquad (26)$$

相互変換の計算から $I_\tau^{\tau'}(e^{s\zeta}) = e^{\frac{1}{4}(\tau'-\tau)s^2} e^{s\zeta}$ がわかり，しかも $I_\tau^{\tau'}(e^{\frac{1}{4}s^2\tau} e^{s\zeta}) = e^{\frac{1}{4}s^2\tau'} e^{s\zeta}$ だから，集団 $\{e^{\frac{1}{4}s^2\tau} e^{s\zeta}; \tau \in \mathbb{C}\}$ を $e_*^{s\zeta}$ と書き $e_*^{s\zeta}$ を $*$-積の世界の指数関数と思うことにしたわけである．この文脈で $e_*^{s\zeta}$ を q-number 指数関数とか $*$-指数関数とよんでよいであろう．積公式 (18) より，指数法則

$$:e_*^{s\zeta}:_\tau *_\tau :e_*^{t\zeta}:_\tau = :e_*^{(s+t)\zeta}:_\tau, \quad \forall \tau \in \mathbb{C} \qquad (27)$$

もわかるから表示 τ は省略して $e_*^{s\zeta} * e_*^{t\zeta} = e_*^{(s+t)\zeta}$ と書いておいてよいであろう．おまけに，$:e_*^{s\zeta}:_\tau$ は任意の τ に対して微分方程式

$\frac{d}{dt}g(t)=\zeta*_\tau g(t)$ の初期条件 $g(0)=1$ の解である．これも $\frac{d}{dt}g_*(t)=\zeta_**g_*(t)$, $g_*(0)=1$, と書いてよいであろう．$e_*^{s\zeta}$ を互いに相互変換される1径数群の族と理解するより，さまざまな表示を持つ一つのものと理解したほうがよいであろう．

一般に h が整関数（$\mathbb{C}$ 上正則な複素関数）のとき (19) 式と組み合わせて次の公式も得られる：

$$:e_*^{2s\zeta}*h(\zeta):_\tau = e^{2s\zeta+s^2\tau}h(\zeta+s\tau). \tag{28}$$

1変数の多項式の空間だけを考えているときには元（げん）の表示が安定しているから，上のような考え方は説得力を持つだろうが，非可換の代数の表示の問題（これは10章で扱う）を考えると，表示の問題は極めて大きな意味を持っていることがわかるだろう．

$*$-積で書かれた元を一人歩きさせるために，$\sum a_n\zeta_*^n$ のように書かれている元を $f_*(\zeta_*)$ と書くことにする．形式的な微分を

$$\partial_\zeta f_*(\zeta_*) = \sum a_n n\zeta_*^{n-1}$$

で定義する．次の公式は些細な注意に見えるが微分まで $*$-積のままやってよいと言っているので，大きな意識変更である：

$$:\partial_\zeta f_*(\zeta_*):_\tau = \partial_\zeta :f_*(\zeta_*):_\tau. \tag{29}$$

いずれにせよ，いったん言語化できてしまうと，言語はそれ自身が持っている論理性で一人歩きし始める．積公式より，$\forall\tau\in\mathbb{C}$ について指数法則

$$e^s:e_*^{t\zeta}:_\tau = :e_*^{s+t\zeta}:_\tau, \quad :e_*^{s\zeta}:_\tau *_\tau :e_*^{t\zeta}:_\tau = :e_*^{(s+t)\zeta}:_\tau \tag{30}$$

が成立していることが確かめられるから，表示 τ は省略して

$$e^s e_*^{t\zeta} = e_*^{s+t\zeta}, \quad e_*^{s\zeta} * e_*^{t\zeta} = e_*^{(s+t)\zeta}$$

と書いてよいであろう．これが $*$-積の世界での指数関数である．

$f(\tau,\zeta)$ が一つのものの（共通）言語化であるための必要十分条件は，これが熱伝導方程式 (23) の解となっていることであったが，これも次のように言うことができる：

命題 9.2　$f_*(\zeta)$ が $*$-積の世界での関数であるための必要十分条件は $:f_*(\zeta):_\tau$ が (23) の解となっていることである．

この言い換えは心理的絶対時間と時空座標関数の一部としての時間との関係を考えるときに重要になると思われる．

単に表示を変えただけだが，これで母屋を攻撃する準備が完了した．後はこれが発酵するのを待つだけである．しかし，予想される次のような反撥に答えておかねばなるまい．

> $f_*(\zeta)$ の世界の極大イデアル空間は $\mathbb{C}$ である．それ以上に何があるというのか．表示を変えただけで新しそうな顔をするのは許しがたい欺瞞である．

9.1.2　ヤコビの楕円テータ関数

$*$-指数関数の表示 (24) をよく見ると $:e_*^{is\zeta}:_\tau = e^{-\frac{1}{4}s^2\tau}e^{is\zeta}$ という表示になっている．これは τ の実部 $\mathrm{Re}\,\tau>0$ だと，実数を動く s の関数としては $|s|$ が大きい所で極めて速く減衰する関数（急減少関数）である．

●テータ関数　指数関数 $e_*^{t\zeta}$ を使って $\theta(\zeta,*)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} e_*^{2ni\zeta}$ を考えてみよう.

$$:\theta(\zeta,*):_\tau=\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2ni\zeta-n^2\tau}$$

であるから，これは $\tau=0$ では発散していて意味がない式だが，$\mathrm{Re}\,\tau>0$ では $e^{-n^2\tau}$ が効いて絶対収束している．実は $\theta(\zeta,\tau)=:\theta(\zeta,*):_\tau$ はヤコビの楕円テータ関数 $\theta_3(\zeta,\tau)$ である.

収束性をみるには $-\frac{1}{4}s^2\tau+is\zeta=-\frac{\tau}{4}\left(s-\frac{2i\zeta}{\tau}\right)^2-\frac{\zeta^2}{\tau}$ のように平方完成して考える．ζ が有界な範囲を動いているかぎり，$e^{-\frac{1}{4}s^2\tau+is\zeta}$ も s に関して急減少であることがわかる.

このことを使うと次の両側無限級数の τ-表示は $\mathrm{Re}\,\tau>0$ であるかぎり，ζ に関して $\mathbb{C}$ 上正則な関数に収束（広義一様絶対収束）していることがわかる：

$$\theta_1(\zeta,*)=\frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e_*^{(2n+1)i\zeta},\quad \theta_2(\zeta,*)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_*^{(2n+1)i\zeta},$$

$$\theta_3(\zeta,*)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_*^{2ni\zeta},\qquad \theta_4(\zeta,*)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e_*^{2ni\zeta}$$

これまでの言葉遣いでは上の関数はすべての $\tau\in\mathbb{C}$ で定義された共通言語ではなく，その半分の半平面 $\mathrm{Re}\,\tau>0$ で定義された（共通）言語ということになるが，これらの τ-表示 $\theta_i(\zeta,\tau)$ がとりもなおさずヤコビの楕円テータ関数なのである．つまり，普通の指数関数 $(\tau=0)$ では $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2ni\zeta}$ は発散するので，2π-周期超関数としてしか意味をつけられないが，これの表示を普通と違うものに変形すると普通の関数として意味を持つものに変わるのである.

τ を表示変形のパラメーターと思わず普通の数として扱えば $\theta_i(\zeta,\tau)$ は母屋の中の関数であるが，軒下ではこれが等比級数の両側無限和

という簡単な形に書かれているのである．

指数法則 $e_*^{a\zeta+s}=e_*^{a\zeta}e^s$ より各 θ_i は $\theta_i(\zeta+2\pi,*)=\theta_i(\zeta,*)$ をみたす周期 2π の周期関数であり，さらに指数法則 $e_*^{a\zeta+b\zeta}=e_*^{a\zeta}*e_*^{b\zeta}$ よりあきらかに

$$e_*^{2i\zeta}*\theta_i(\zeta,*)=\theta_i(\zeta,*)\quad(i=2,3),$$
$$e_*^{2i\zeta}*\theta_i(\zeta,*)=-\theta_i(\zeta,*)\ \ (i=1,4)$$

という自明な関係式を持つ．そこで $\forall\tau$ について両辺の τ-表示を計算してみると $:e_*^{2i\zeta}:_\tau=e^{-\tau}e^{2i\zeta}$ だから，(19) 式を使って

$$e^{2i\zeta-\tau}\theta_i(\zeta+i\tau,\tau)=\theta_i(\zeta,\tau);\quad(i=2,3),$$
$$e^{2i\zeta-\tau}\theta_i(\zeta+i\tau,\tau)=-\theta_i(\zeta,\tau);\ (i=1,4),$$

が得られる．これはテータ関数の**擬周期性**とよばれる等式である．**指数因子** $e^{2i\zeta-\tau}$ は $i=1,2,3,4$ で共通だから，（母屋の計算の）比を考えて $\theta_{i/j}(\zeta,\tau)=\theta_i(\zeta,\tau)/\theta_j(\zeta,\tau)$ とすれば，これらは

$$\theta_{i/j}(\zeta+2\pi,\tau)=\theta_{i/j}(\zeta,\tau),\quad \theta_{i/j}(\zeta+i\tau,\tau)=\pm\,\theta_{i/j}(\zeta,\tau)$$

という2重周期性を持つ有理形関数（楕円関数）となる．

補題 9.1　$e_*^{2i\zeta}*\theta(\zeta)=\pm\,\theta(\zeta)$, $\theta(\zeta+2\pi)=\theta(\zeta)$ であるような整関数は $\theta_i(\zeta,*)$ の1次結合である．

証明　2π-周期性より，$\theta(\zeta)=\sum_n a_n e_*^{in\zeta}$ と展開され，第1の等式から $a_{n+2}=\pm\,a_n$ がわかる．すると，自由に動かせるのは a_0,a_1 と $e_*^{2i\zeta}*\theta(\zeta)=\pm\,\theta(\zeta)$ の $\pm$ だけとなる．　□

共通言語としては半平面 $\mathrm{Re}\,\tau>0$ でしか定義できてないが，この共通言語の定義域には自然境界があってこれ以上広がらないことが

わかっている．たとえば

$$:\theta_3(\zeta,*):_\tau=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{2ni\zeta}e^{-n^2\tau}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{2ni\zeta}q^{n^2}\quad(q=e^{-\tau})$$

のようにおき q の関数とみると，$|q|=1$ は自然境界となるのである．これは**アダマール・ファブリの間隙定理**として古くから知られている．

$\theta_i(\zeta,*)$ はヤコビのテータ関数をいわば時空を超えて言語化したもの，あるいはすべての $\mathbb{G}$ で対話可能となるように共通言語化したものであるが，これが両側等比級数という簡単な形をしているのは極めて面白いことである．これを，表示 τ を付けたまま θ_i/θ_j なる比を考えると，周期が二つある関数，いわゆる楕円関数が得られる．楕円関数はフェルマーの最終定理の証明 (Wiles) にも使われたものだし，水星の近日点の移動を相対論的に扱うときにも現れ，周期性というものを深く考えさせるものである[26]．

補題 9.2 $f(\zeta)$ が $f(\zeta+2\pi)=f(\zeta)$，$e^{2mi\zeta-m\tau}f(\zeta+i\tau)=f(\zeta)$ をみたす整関数は積公式の τ を $\tau'=\dfrac{\tau}{m}$ にかえた積公式で $f(\zeta+2\pi)=f(\zeta)$，$e_{*_{\tau'}}^{2mi\zeta}*_{\tau'}f(\zeta)=f(\zeta)$ となり，次のように表示される：

$$f(\zeta)=\sum_k a_k e_{*_{\tau'}}^{ik\zeta},\quad a_{k+m}=a_k.$$

このように 2π-周期性となにがしかの指数因子で擬周期 $i\tau$ を持つ整関数をすべてテータ関数とよぶことにすれば，テータ関数 $f(\zeta,\tau)$ は τ の関数 $f(0,\tau)$ だけできまってしまう関数である．$f(\zeta,*)$ を表示

26) 言うまでもないことだが，これは太陽のまわりが，完全なユークリッド空間だと思って軌道を観測すると，近日点が 1 周期ごとに少しずつ移動するように見えると言っているのである．しかし，これが完全な周期運動に見えるように太陽のまわりの時空概念を変えるほうが，ものの見方としては正しいように思われる．

によらない本質の世界，$f(0,\tau)$ はそれを τ-表示して取り出す数値（観測値）のように考えると面白い．

この場合 $\theta_i(\zeta,\tau)\theta_j(\zeta,\tau)$ を考えるには積公式のパラメーターを τ から $\tau/2$ のように動かすので，表示の変更のほうが大切になる．これを物理の単位系の変更のように考えるとさらに面白くなる．つまり，テータ関数の全体はさまざまな単位系で数値化される矮小化された物理世界みたいなものである．

しかし，同時に次のような奇妙なことに遭遇する：

●二つの逆元　無限等比級数 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ が収束するなら総和は $\frac{1}{1-x}$ である．特に $(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k=1$ である．もし $\sum_{k=0}^{\infty} x^{-k}$ が収束するなら総和は $\frac{1}{1-x^{-1}}=-\frac{x}{1-x}$ である．特に $(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} x^{-k}=-1$ である．実数の世界では両方が同時に収束するということはないのだが，$\theta_i(\zeta,*)$ はそのような表示になっている．

$-e_*^{-Ni\zeta}*\sum_{n=N}^{\infty} e_*^{ni\zeta}$，$e_*^{-N'i\zeta}*\sum_{-\infty}^{N'} e_*^{ni\zeta}$ はどれも $1-e_*^{i\zeta}$ の $*$-積での逆元である．同じ元の逆元がたくさん見つかるのだから，これは結合律を乱している[27)]．どのように結合律が破れているのかをみるために $\sum_{n=0}^{\infty} e_*^{ni\zeta}=\frac{1}{1-e_*^{i\zeta}}$，$-\sum_{-\infty}^{1} e_*^{ni\zeta}=\frac{e_*^{-i\zeta}}{e_*^{-i\zeta}-1}$ のように書いてみると，第 2 式の分母分子に $e_*^{i\zeta}$ を掛けて第 1 式を得るという，普通は許されている式の計算ができないという形で現れている．つまり $B^{-1}*A^{-1}=(A*B)^{-1}$ が破れていることがわかる．$(e_*^{-i\zeta}-1)^{-1}$ はあくまで**無限級数を簡略化して書いただけ**のものだから，$(e_*^{-i\zeta}-1)^{-1}=(e_*^{-i\zeta}*(1-e^{i\zeta}))^{-1}$ という等式は成立していないのである．

27) 結合律のあるところで X の逆元を A,B とすると $A=A(XB)=(AX)B=B$.

また，異なる逆元どうしの積は発散する：

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} e_*^{ni\zeta}\Big)*\Big(\sum_{-\infty}^{1} e_*^{ni\zeta}\Big)=\infty.$$

このように逆元はたくさんあり，結合律を破るので逆元を書くときにはつねにその作られ方に注意を払わねばならない．

これらのことはもともと母屋のテータ関数でも起こっていたことであるが，母屋のほうには $*$-積というものがないから，取り上げられたことがなかっただけである．しかし Jacobi にははっきりこの積が意識されていたように思える．$*$-積は上のように発散して定義できないこともあるが，結合律に注意して使えば，それでもかなり計算が可能なのである．

比そのものは軒下では考えられないから，$(\theta_i(\zeta,*):\theta_j(\zeta,*))$ の組で代用するが，これが軒下では表示変形のパラメーター τ に依存しない本質的なものと理解されるから，$(\theta_i(\zeta,*):\theta_j(\zeta,*))$ はデフォルメに耐えて生き残る 2 重周期 q-number 関数の本当の姿と言ってもよいだろう．（私にはピカソの絵より美しく見える.） これで，代数の元の表示の変形というものが単なる言い換え以上のものであるらしいことはわかるであろう．

9.2　多価の元の数学的例

逆元を打ち消し行動のように理解すると，$1-e_*^{i\zeta}$ **には打ち消しがたくさんある**ということになる．今のところこの現象をどう考えるべきかわからないのだが，同じことが総和でなく積分でも起こる．

$\mathrm{Re}\,\tau>0$ のときには (25) 式より次の積分の τ-表示も収束（広義一

様絶対収束）することがわかる：

$$\int_{-\infty}^{0} e_*^{it\zeta}dt, \quad -\int_{0}^{\infty} e_*^{it\zeta}dt, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e_*^{it\zeta}dt.$$

次の計算は ζ の逆元がたくさん作れることを示している：

$$\zeta*\Bigl(i\int_{-\infty}^{0} e_*^{it\zeta}dt\Bigr) = \int_{-\infty}^{0} i\zeta * e_*^{it\zeta}dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{dt}e_*^{it\zeta}dt = 1.$$

$i\int_{-\infty}^{0} e_*^{it\zeta}dt*\zeta=1$, $\zeta*\Bigl(-i\int_{0}^{\infty} e_*^{it\zeta}dt\Bigr)=1$ も同様である．さらに

$$\zeta*\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{it\zeta}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta*e_*^{it\zeta}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}e_*^{it\zeta}dt = 0$$

でもある．超関数のフーリエ変換の公式に似せて次のようにおき：

$$\delta_*(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e_*^{it\zeta}dt, \tag{31}$$

τ-表示を $:\delta_*(\zeta):_\tau$ と書く．$\mathrm{Re}\,\tau>0$ の条件でフーリエ変換の公式から

$$:\delta_*(\zeta):_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{4}t^2}e^{it\zeta}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}}e^{-\frac{1}{\tau}\zeta^2} \tag{32}$$

である．次のこともわかる：

補題 9.3　$e^{i\theta}\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{e^{i\theta}it\zeta}dt$ は $\mathrm{Re}\,e^{2i\theta}\tau>0$ であるかぎり θ によらない．

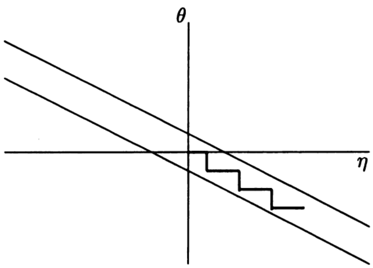
証明　$\mathrm{Re}\,e^{2i\theta}\tau>0$ であれば積分は収束している．θ で微分すると，

$$ie^{i\theta}\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{e^{i\theta}it\zeta}dt + e^{i\theta}\int_{-\infty}^{\infty} it\frac{d}{dt}e_*^{e^{i\theta}it\zeta}dt$$

となることがわかるが，第 2 項を部分積分すると第 1 項と打ち消しあうことがわかる．□

これは $e^{i\theta}\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{e^{i\theta}it\zeta}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e_*^{e^{i\theta}it\zeta}d(e^{i\theta}t)$ と書いてみれば複素積分の積分路を実軸から θ だけ回転しても積分値は変わらないと言っているのである．そこで表示 τ を $\tau = re^{i\eta}$, $r > 0$ として

$$:e^{i\theta}\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{e^{i\theta}it\zeta}dt:_{re^{i\eta}} = e^{i\theta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{2i\theta}re^{i\eta}t^2}e^{e^{i\theta}it\zeta}dt$$



(積分路と表示を連動して動かす)

を $e^{2i\theta+i\eta}$ に注意して考えると，図の帯の部分では積分は収束し

(a)　η を動かすのは表示を変更しているだけ

(b)　θ を動かしても積分はなにも変わらない

ということがわかる．η を 0 から -2π まで追跡すればそれに応じて θ を変えて積分を収束させねばならないが，θ は 0 から π まで変わるだけである．表示のほうを一周させると積分路が逆向きになり次式となる：

$$:\delta_*(\zeta):_{re^{-2\pi i}} = -:\delta_*(\zeta):_r.$$

一つの元の表示を動かして 1 回転してもとの表示に戻しても同じ所に戻らないのである．これをどのように解釈するかは難しいが，次のように解釈するしかないと考えている．

命題 9.3　積分 $:\delta_*(\zeta):_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} :e_*^{t\zeta}:_\tau dt$ は $\tau \in \mathbb{C} - \{0\}$ で定義された 2 価の元である．

つまり，**区別できない二つのものが現れる**のである．集合の元が多価性を持って定義されるなどということは**ブルバキ数学では禁止されている**ことだが，私はこれを個性の無い素粒子を扱うためには欠

かせない概念だと考えるのである．

9.2.1　2次式の指数関数，相互変換

§9.1.2 では1次式の指数関数を考えたが，今度は $e_*^{t\zeta_*^2}$ を考えてみよう．ただし $:\zeta_*^2:_\tau = \zeta^2+\frac{1}{2}\tau$ としている．ここからも値を二つ持つ元（2価の元）が出てくるのである．

これまでの文脈では $\mathbb{G}$ にあたるものが，τ である．このことを念頭において以下のことを読んでほしい．

解の形が予想できる場合には一意性を使って常微分方程式系にしてしまうという手段があるから，これを使って $e_*^{t\zeta_*^2}$ を考えよう．そこで，微分方程式

$$\frac{d}{dt}f_t = \zeta_*^2 * f_t, \quad f_0 = 1$$

を考える．まず次のことに注意する：

補題 9.4　上の方程式（線形発展方程式）の実解析的解は初期条件に関し（存在すれば）一意的である．

証明は，二つあったとして差を考え $t=0$ の所での高階微分がすべて消えることをみればよい．

この一意性を考慮し $:f_t:_\tau = g(t)e^{h(t)\zeta^2}$ のような実解析解を探すと，$:\zeta_*^2:_\tau = \zeta^2+\frac{\tau}{2}$ と積公式 (18) から上の方程式は $\forall\tau$ に対して次のような常微分方程式系に変わる：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}h(t) = (1+\tau h(t))^2, & h(0) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}g(t) = \dfrac{1}{2}(\tau^2 h(t)+\tau)g(t), & g(0) = 1. \end{cases}$$

これを解いて次のような解が得られる：

$$:e_*^{t\zeta_*^2}:_\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\tau t}}\, e^{\frac{t}{1-\tau t}\zeta^2}, \quad \forall\tau,\ t\tau\neq 1. \tag{33}$$

すぐ気づくのは $\sqrt{\ }$ のせいで右辺は2価関数であり，$e_*^{t\zeta_*^2}$ は ± の不定性のある2価の元として扱わねばならないということである．理由は，$\tau(\theta)=e^{i\theta}\left(\tau-\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t}$ とおいて

$$:e_*^{t\zeta_*^2}:_{\tau(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{e^{i\theta}(1-\tau t)}}\, e^{\frac{t}{e^{i\theta}(1-\tau t)}\zeta^2}$$

とし，θ を 0 から 2π まで動かすと $:e_*^{t\zeta_*^2}:_\tau = \pm :e_*^{t\zeta_*^2}:_\tau$ となることからわかる．τ を変えるのは単に表示を変えることなのに，表示を一周させてもとの表示に戻っても，元は符号が変わったものになってしまうのである．つまり $e_*^{t\zeta_*^2}$ は $\delta_*(\zeta)$ と同様，**原理的に ± の区別のつけられない2価の元**なのである[28)]．

この式と (32) 式を比べると，普通のデルタ関数の場合と同様に

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}\, e_*^{-\frac{1}{t}\zeta_*^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e_*^{it\zeta}dt \tag{34}$$

という式が $\mathrm{Re}\,\tau>0$ で成立するのがわかる．

$:e_*^{t\zeta_*^2}:_\tau = I_0^\tau e^{t\zeta^2}$ となるのは明白であろう．したがって，$\tau=0$ での指数法則 $e^{s\zeta^2}e^{t\zeta^2}=e^{(s+t)\zeta^2}$, $e^{a+s\zeta}e^{t\zeta^2}=e^{a+s\zeta+t\zeta^2}$ より，2価関数のままの指数法則

$$e_*^{s\zeta_*^2} * e_*^{t\zeta_*^2} = e_*^{(s+t)\zeta_*^2}, \quad e_*^{a+s\zeta} * e_*^{t\zeta_*^2} = e_*^{a+s\zeta+t\zeta_*^2} \tag{35}$$

が得られる．これらは，微分方程式の実解析解の一意性からも得られるが，左辺の特異点が右辺では消えてしまい，別のところに特異

28) このようなことは現物を扱っている人にとってはその場の状況がどちらを選ぶべきか教えてくれるので，たいしたことではない．しかし，理論屋はその判断の基準を問題にするのである．

点が現れるという特徴がある．計算は2価の元のまま $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ のように計算されている．前節の結果とあわせると次の式となる：

$$:e_*^{t\zeta_*^2+2s\zeta+a}:_\tau = \frac{e^{s^2\tau}}{\sqrt{1-t\tau}}\,e^{t\zeta^2+2s\zeta+a}. \tag{36}$$

計算が正しいとすれば上の式は相互変換で移りあっていなければならない．これを確かめておこう．相互変換は(21)式で，始めは多項式に対し定義したが，指数関数まで自然に拡張され $I_\tau^{\tau'}(e^{s\zeta})=e^{s\zeta+\frac{1}{4}(\tau'-\tau)s^2}$ であった．一般の f に対しては $I_\tau^{\tau'}(f)$ は発散してしまうことが多いが，2次の指数関数に対しては計算でき

$$I_\tau^{\tau'}(ge^{s\zeta^2}) = \frac{g}{\sqrt{1-(\tau'-\tau)s}}\,e^{\frac{s}{1-s(\tau'-\tau)}\zeta^2} \tag{37}$$

となる．この公式を導くには補題9.4に注意して発展方程式

$$\partial_t f_t = \partial_\zeta^2 f_t, \quad f_0 = ce^{s\zeta^2}$$

を解けばよい．$f_t=g(t)e^{h(t)\zeta^2}$ とおけば，解くべきものは次のような常微分方程式系となる：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}h(t) = 4h(t)^2, & h(0)=s \\ \dfrac{d}{dt}g(t) = 2g(t)h(t), & g(0)=c. \end{cases} \tag{38}$$

これを解いて次が得られる：

$$g(t)e^{h(t)\zeta^2} = \frac{c}{\sqrt{1-4ts}}\,e^{\frac{s}{1-4ts}\zeta^2}. \tag{39}$$

$t=\dfrac{\tau}{4}$ として，$I_0^\tau e^{s\zeta^2}$ がわかる．逆対応 $I_\tau^0=(I_0^\tau)^{-1}$ と合成して $I_0^{\tau'}I_\tau^0$ で(37)を得る．やはり，$\sqrt{\ }$ のせいで右辺は2価関数であり，$I_0^\tau e^{s\zeta^2}$ は τ に関し $\pm$ の不定性の付いた2価の元として扱わなければなら

ない．補題9.4の一意性と矛盾するように思うかもしれないが，こちらは $\dfrac{1}{\sqrt{1-4ts}}$ が1価になるようなリーマン面上での一意性のことだから，矛盾していない．

$\dfrac{s}{1-s\tau}=a$ とおいて (37) 式をあてはめると，

$$I_{\tau}^{\tau'}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-s\tau}}\,e^{\frac{s}{1-s\tau}\zeta^2}\Big)=\frac{1}{\sqrt{1-s\tau'}}\,e^{\frac{s}{1-s\tau'}\zeta^2} \tag{40}$$

のような2対2の写像になる．この式は全体にわたって1対1の対応と思い直すことができない．$s=0$ では1価だと思うかもしれないが，$\sqrt{1}=\pm 1$ である．このように2次式の指数関数のところでは，局所座標変換のように考えてきた相互変換も2対2の写像になってしまうのである．相互変換で特異点が動いていることに注目してもらいたい．このことから，表示を変えると演算の定義域も変わるという現象が起こるのである．このようなことは，数学の user の中では扱っている対象が自然に要求する論理で避けられてきているはずだが，これが純数学の中では縮退した形で現れているのだと思われる．

多価関数などは関数論によく出てくるものでことさら騒ぎたてる必要もないだろうが，この場合は一つの元の「同じ表示」が二つ出てきて，しかもそのままで相互変換もされ，演算もされているのである．

次の命題9.4では群という言葉を拡張して使っているが，このような群概念はこれまでの数学には現れていない：

命題 9.4 $e_*^{t\zeta_*^2+2s\zeta+a}$ は2価の元のままで“可換群”をなす．

したがって，このようなものを既成の数学の枠の中で捉えようとすると，無限次元とか，場の理論とかの，かなり苦しい解釈を持ち込

まねばならなくなるのだが，この部分は数学的にあまりはっきりしていない．

m 対 m の座標変換で作る多様体

荒っぽく言えば多様体とはパッチワークのことだが，その多様体の「点」という概念がパッチワークで崩れないことが要求される．つまり，一つの点 p はさまざまな局所座標系 $U_1, U_2, \cdots, U_\ell$ を使って座標と称する数字の組 $(x_1^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)})$, $i = 1 \sim \ell$, で表される．この数字の組は i ごとに変わるが，U_i から U_j に局所座標系を変更したときどのように変換されるかはきまっていて

$$\Phi_i^j(x_1^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}) = (x_1^{(j)}, \cdots, x_n^{(j)})$$

となるものとする．つまり局所座標系 U_i で $(x_1^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)})$ という座標を持つ p は局所座標系 U_j では $(x_1^{(j)}, \cdots, x_n^{(j)})$ という座標で表されるとする．「点」という概念がパッチワークで崩れないということは，局所座標系を U_i から U_j，U_j から U_k，U_k からもとの U_i へと変換したとき $\Phi_k^i \Phi_j^k \Phi_i^j$ が恒等写像：

$$\Phi_k^i \Phi_j^k \Phi_i^j(x_1^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}) = (x_1^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)})$$

になる場合をいう．こうならないと，点 p というものの座標をどうきめてよいかわからなくなるからであるし，パッチワークとしてみれば縫い合わせ目に齟齬のある「できそこない」とみなされるからである．

しかし，微積分の代数の中にはこのようなものも混じっているのである．

10

普遍的不確定性？

前章で述べてきた多価性とか結合律の破れは，変数を多くするともっとさまざまな形で起こる．6 章でやった非可換時空モデルをもとに話をしよう．

まず，例 1 (p.87) を見直してもらいたい．ハイゼンベルグ群 $E\times_\omega\mathbb{R}$ では指数写像が全単射だから，(X,a) を e_*^{a+X} と書いて，積は

$$e_*^{a+X} * e_*^{b+Y} = e_*^{a+b+\omega(X,Y)+X+Y}$$

のようにして入れたものと考える．このようにしてやると群を代数の中で実現でき，計算がもっと自由になる利点がある．

X, Y は E の元として考えてきたのだが，これを E の正規直交規定をひとつ固定してその成分を使って

$$X = (u^1, \cdots, u^d) = \boldsymbol{u}, \quad Y = (v^1, \cdots, v^d) = \boldsymbol{v}$$

のようにみる．u^i は E の座標関数である．これを $1\times d$-行列とみて，${}^t\boldsymbol{u}$ をその転置行列（縦ベクトル）とする．$d\times d$-行列全体を $\mathfrak{M}(d)$ とし，$d\times d$-対称行列全体を $\mathfrak{S}(d)$，$d\times d$-歪対称行列全体を $\mathfrak{A}(d)$ と書く．$\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]$ を普通の複素係数の多項式全体とする．まず，上の代数が本当の指数関数として出てくるように，少し一般的に考えよう．

10.1　ワイル代数，ハイゼンベルグ代数

任意の $\Lambda=(\Lambda^{ij})\in\mathfrak{M}(d)$ に対して，積 $*_\Lambda$ を (18) 式 (p.133) に似た次のような公式で与える：

$$f(\boldsymbol{u})*_\Lambda g(\boldsymbol{u})=f\exp\left\{\frac{\mu}{2}\Big(\sum_{i,j=1}^{d}\overleftarrow{\partial_{u^i}}\Lambda^{ij}\overrightarrow{\partial_{u^j}}\Big)\right\}g. \tag{41}$$

公式 (41) は総和記号を省略するアインシュタインのルールを使って次のように書いておくと便利なことが多い：

$$f*_\Lambda g=\sum_{k\geq 0}\frac{\mu^k}{k!2^k}\Lambda^{i_1j_1}\cdots\Lambda^{i_kj_k}\partial_{u^{i_1}}\cdots\partial_{u^{i_k}}f\ \partial_{u^{j_1}}\cdots\partial_{u^{j_k}}g. \tag{42}$$

積 (41) は $\forall f,g\in\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]$ について定義でき，結合律をみたす．この結合代数を $(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_\Lambda)$ と書き，一般ハイゼンベルグ代数（あるいは，Λ-代数）とよんでおく．

$(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_\Lambda)$ の元は $u^a*_\Lambda u^b+u^i*_\Lambda u^j*_\Lambda u^k+u^i*_\Lambda u^j*_\Lambda u^l$ といったように表されるが，非可換なので，元の表示が一意的でなく，交換子を経由してさまざまに表示されてしまうので，こういうものはなるべく上の積公式で計算しきって下の例のように普通の多項式として表示しておくと都合がよい．

計算の練習：$u_i*_\Lambda f(\boldsymbol{u})=u_iu_j+\frac{\mu}{2}\sum_j\Lambda^{ij}\partial_{u^j}f(\boldsymbol{u})$,

$$u_i*_\Lambda u_j*_\Lambda u_k=u_iu_ju_k+\frac{\mu}{2}(\Lambda^{ij}u_k+\Lambda^{ik}u_j+\Lambda^{jk}u_i).$$

Λ は任意の $\mathfrak{M}(d)$ の元でよい．しかも $f*_\Lambda g$ は一方が多項式なら他方は C^∞-級関数で計算ができる．さらに次のことが知られている：

定理 10.1 Λ と Λ' の歪対称部分が等しい，つまり $\Lambda-\Lambda'\in\mathfrak{S}(d)$ ならば $(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_{\Lambda})$ と $(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_{\Lambda'})$ は代数として同型である[29]．

同型対応は次節の相互変換で与えられる．特に Λ が対称行列ならば，得られる代数は可換で普通の多項式の代数と同型である．この辺の計算は 1 変数の場合と並行している．

ハイゼンベルグ代数は $d=2m$ で $J=\begin{bmatrix}0 & -I_m\\ I_m & 0\end{bmatrix}$ とし，$\Lambda=(\Lambda^{ij})=(K^{ij}+J^{ij})$ としたときの代数のことで，$(H_\mu(2m);*)$ と書く．Λ の歪対称部分が J ときまっているので，このような場合には積を $f*_{\Lambda}g$ と書かずに，$f*_{K}g$ のように書く．生成元のところでは

$$u^i*_{K}u^j-u^j*_{K}u^i\ (=[u^i,u^j]_{*_K})=\mu J^{ij} \tag{43}$$

となる．これより，対称部分 K は無視して，ハイゼンベルグ代数は上のような表示を使わずに，生成元 $(\mu,u^1,u^2,\cdots,u^m,v_1,v_2,\cdots,v_m)$ に，交換子 $[a,b]=a*b-b*a$ を使って，基本交換関係

$$[u^i,u^j]=0=[v_i,v_j],\quad [u^i,v_j]=\mu\delta^i_j,\quad [\mu,u^i]=[\mu,v_j]=0$$

を入れて作った代数だということもできる．しかし，このように普通の多項式での表示を使わずに $*$-積のみでなにもかも書こうとすると一つの元の表示の仕方がたくさん出てきて不都合が起こる．

ハイゼンベルグ代数で μ を変数と思わずに数 $i\hbar$ としたものをワイル代数とよび $W_\hbar(2m)$ と書く．つまり，

命題 10.1 任意の $K\in\mathfrak{S}(2m)$ に対して $(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}],*_{K+J})$ は（μ を数 $i\hbar$ と思えば）ワイル代数 $W_\hbar(2m)$ と同型な代数になる．

---

29) 実際は歪対称部分が等しくなくてもそれが共役 $J'={}^tGJG,\ G\in GL(d)$ であれば代数は同型になる．

命題 10.1 はワイル代数 $W_\hbar(2m)$ の（多項式の世界での）実現であると同時に，元の一意的表示をも与えるものである．

ワイル代数は微積分の演算子が作る代数を表しているので，量子論で広く使われている代数である．ハイゼンベルグ代数では $\hbar^{-1}{*}u_i$ のような元は考えないから，かなり違ったものにみえるが，$e_*^{tu_i}$ と $e_*^{t'\hbar^{-1}*u_i}$ の違いは $t'=\hbar t$ とおくと消えてしまうので計算上は本質的な違いは起こらない．

物理では K としては一般のものを考えずに，K を次の 3 つのものに限ることが多い：

$$(0, K_0, -K_0) = \left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & I\\ I & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{bmatrix}\right).$$

この場合 K-表示はそれぞれワイル表示，正規順序表示，反正規順序表示とよばれている．積公式は具体的には次のようになる：

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}) *_0 g(\boldsymbol{u}) &= f \exp\left\{\frac{\hbar i}{2}\overleftarrow{\partial_v}\wedge\overrightarrow{\partial_u}\right\} g && \text{(Moyal 積公式)}\\ f(\boldsymbol{u}) *_{K_0} g(\boldsymbol{u}) &= f \exp\{\hbar i\overleftarrow{\partial_v}\ \overrightarrow{\partial_u}\} g && \text{(}\Psi\text{DO 積公式)}\\ f(\boldsymbol{u}) *_{-K_0} g(\boldsymbol{u}) &= f \exp\{-\hbar i\overleftarrow{\partial_u}\ \overrightarrow{\partial_v}\} g && \text{(}\bar\Psi\text{DO 積公式)} \end{aligned} \qquad (44)$$

ただし $\overleftarrow{\partial_v}\wedge\overrightarrow{\partial_u} = \sum_i(\overleftarrow{\partial_{v^i}}\overrightarrow{\partial_{u^i}} - \overleftarrow{\partial_{u^i}}\overrightarrow{\partial_{v^i}})$，$\overleftarrow{\partial_v}\ \overrightarrow{\partial_u} = \sum_i \overleftarrow{\partial_{v^i}}\ \overrightarrow{\partial_{u^i}}$ である．

しかし，表示はこれだけでは十分でない．むしろすべての表示を平等に扱ってみると，上の表示は極めて特殊な表示であって一般性がないことがわかるのである．当然 §9.1.2 で使ったような表示は含まれていないから，上の三つだけではなにか重要なことを見落としていないかが気になるところである．

最近の物理では非可換時空を考えることが主流になりつつあるが，しかし，時空そのものを非可換なものとして考えるというのは我々

が素朴に持っている面積とか，体積という感覚も変えるということだから，大変なことである．このようなことが数学的に可能なことであろうか？

10.2　表示と相互変換

Λ の歪対称部分を J，対称部分を K とする．$(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_{\Lambda})$ の代数としての性質は定理10.1より J だけできまるから，以下では J は固定して，K のみ変化する場合を考える．

$\Lambda=K+J$ であるが，J は固定したので，$*_{K+J}$ と書く代わりに，$*_{K}$ と書くことにする．対称行列 $K, K'\in\mathfrak{S}(d)$ に対して，$(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_{K})$ と $(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_{K'})$ とは同型なのだが，その同型対応は

$$I_{K}^{K'}(f)=\exp\Big(\frac{\mu}{4}\sum_{i,j}(K'^{ij}-K^{ij})\partial_{u_i}\partial_{u_j}\Big)f \tag{45}$$

で与えられる．右辺は無論 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(\frac{\mu}{4}\sum_{i,j}(K'^{ij}-K^{ij})\partial_{u_i}\partial_{u_j}\Big)^n f$ の意味である．これは $\forall f,g\in\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]$ に対して

$$I_{K}^{K'}(f*_{K}g)=I_{K}^{K'}(f)*_{K'}I_{K}^{K'}(g) \tag{46}$$

をみたし，代数の同型写像 $I_{K}^{K'}:(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_{K})\to(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_{K'})$ になっていることは簡単な多項式で試してみればわかる．(45) 式を**相互変換**とよぶ．

代数の集団 $\{(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_{K});\ K\in\mathfrak{S}(d)\}$ は互いに変換 $I_{K}^{K'}$ で結ばれた同型な代数だから，これが全体として一つのもの（代数）を表していると考えて，これを $(\mathcal{A}_J;*)$ と書き，さらに前のほうで用いた記号 $:\bullet:_{\tau}$ と同じ考え方で

$$:(\mathcal{A}_J;*):_{K}=(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_{K})$$

という記号を使い，これを $(\mathcal{A}_J;*)$ の K-表示とよぶ．K-表示と K'-表示の間の相互変換は局所座標変換のように思うと考えやすい．相互変換は $*$-積の代数構造は変えないが，可換積による表示を変えるので，ときには思いがけない構造が現れたりする．

$K\in\mathfrak{S}(d)$ における K' 方向への無限小の相互変換を次のように定義する：

$$dI_{K}(K')(f)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}I_{K}^{K+tK'}(f)=\frac{\mu}{4}\sum_{i,j}K'^{ij}\partial_{u_i}\partial_{u_j}f. \tag{47}$$

(46) 式を微分すると

$$\begin{aligned}&dI_{K}(\Lambda)(f*_{K}g)\\&=dI_{K}(K')(f)*_{K}g+f*_{K}dI_{K}(K')(g)+\frac{\mu}{4}\sum_{i,j=1}^{n}K'^{ij}\partial_{u^i}f*_{K}\partial_{u^j}g\end{aligned}$$

となる．無限小の相互変換 $dI_{K}(K')$ は後で接続を定義するときに使われるが，ここでは平行という概念だけ定義しておく．

●平行切断　f_{K} が $\forall K\in U$ で定義され U 内の任意の C^∞-級曲線 $K(t)$ に沿って

$$\frac{d}{dt}dI_{K(t)}(\dot{K}(t))(f_{K(t)})=0\quad(\text{ただし }\dot{K}(t)=\frac{d}{dt}K(t))$$

となるとき，f_{K} を U 上の(局所)平行切断とよぶ．

10.2.1　1 次式の指数関数と非可換トーラス

以下では $\mu=i\hbar$ として，ワイル代数のほうで話をする．斉次 1 次式を $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle=\sum a_iu^i$ のように書いておき，$*_{K}$-積に関するこの 1 次式の指数関数 $:e_*^{t\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle}:_{K}$ というのを，微分方程式

$$\frac{d}{dt}f_t(\boldsymbol{u})=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle*_{K}f_t(\boldsymbol{u}),\quad f_0(\boldsymbol{u})=1 \tag{48}$$

の解として定義する．右辺を積公式 (41) で計算すると，

$$\frac{d}{dt}f_t(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}\rangle f_t(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}i\hbar\sum_{i,j}(K+J)^{ij}\partial_{\boldsymbol{u}^j} f_t(\boldsymbol{u}) \tag{49}$$

となるが，解が $:e_*^{t\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle}:_K = e^{t\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle + \frac{i\hbar t^2}{4}\langle \boldsymbol{a}K,\boldsymbol{a}\rangle}$ であることは，代入して確かめて解の一意性を使えば容易にわかる．

微分方程式の解の一意性から次の指数法則が容易に得られる：

$$:e_*^{s\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle}:_K *_K :e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle}:_K = :e_*^{(s+t)\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle}:_K, \quad \forall K \in \mathfrak{S}(2m)$$

これは K を省略して次のように書いてもよい：

$$e_*^{s\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle} * e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle} = e_*^{(s+t)\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle}. \tag{50}$$

$*$-積での指数関数は $e_*^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle} = \{e^{\frac{1}{4i\hbar}\langle \boldsymbol{a}K\,\boldsymbol{a}\rangle} e^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle};\ K \in \mathfrak{S}(2m)\}$ のように表示の集団と考えられる．直接の計算で次のような積公式がわかる：$\forall f \in Hol(\mathbb{C}^{2m})$ について，

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle} *_K f(u) &= e^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle} f\Big(u+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}(K+J)\Big), \\ f(u) *_K e^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle} &= f\Big(u+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}(K-J)\Big). \end{aligned} \tag{51}$$

この辺の計算は § 9.1.2 と本質的に同じであるが，多変数での特徴として**非可換トーラス**とよばれる次のような群が得られる：

命題 10.2 $e_*^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle}$ の全体は以下の積公式で非可換群をなす：

$$\begin{aligned} e_*^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle} * e_*^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle} &= e^{\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{a}J,\boldsymbol{b}\rangle} e_*^{\frac{1}{i\hbar}\langle (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\boldsymbol{u}\rangle} \\ &= e^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a}J,\boldsymbol{b}\rangle} e_*^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle} * e_*^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle}. \end{aligned}$$

これは例 1 の群を含むものである．

●相互変換の拡張　多変数では $*$-積の指数関数より，相互変換のほうが書きやすいので，そこから手をつける．まず (45) で定義される相互変換がどの辺まで拡張できるかをみておこう．すでに $e^{1\,変数\,2\,次式}$ に相互変換を拡張して定義したが，このときも相互変換には特異点が現れていた．

1 変数のときと同様に発展方程式で考えるが，一意性を考慮し，解の形を予測して

$$e^{t\sum_{ij}K^{ij}\partial_{u^i}\partial_{u^j}}\left(ge^{\boldsymbol{u}\frac{1}{i\hbar}A\,{}^t\boldsymbol{u}}\right)=g(t)e^{\boldsymbol{u}\frac{1}{i\hbar}Q(t)\,{}^t\boldsymbol{u}} \tag{52}$$

とおく．すると $Q(0)=A$，$g(0)=g$ として微分方程式

$$\frac{d}{dt}g(t)e^{\boldsymbol{u}\frac{1}{i\hbar}Q(t)\,{}^t\boldsymbol{u}}=\sum_{i,j}K^{i,j}\partial_{u^i}\partial_{u^j}\left(g(t)e^{\boldsymbol{u}\frac{1}{i\hbar}Q(t)\,{}^t\boldsymbol{u}}\right)$$

を解くことになる．

$$\begin{aligned}&\sum_i K^{ij}\partial_{u^i}\partial_{u^j}\left(g(t)e^{\boldsymbol{u}\frac{1}{i\hbar}Q(t)\,{}^t\boldsymbol{u}}\right)\\&=g(t)\left(2\,\mathrm{Tr}\,K\frac{1}{i\hbar}Q(t)+4\frac{1}{(i\hbar)^2}(QKQ)_{ij}u^iu^j\right)e^{\boldsymbol{u}\frac{1}{i\hbar}Q(t)\,{}^t\boldsymbol{u}}\end{aligned}$$

となるから，次の常微分方程式系を得る (§9.2.1 参照)：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}Q(t)=\dfrac{4}{i\hbar}Q(t)KQ(t)\\ \dfrac{d}{dt}g(t)=g(t)\left(\dfrac{2}{i\hbar}\mathrm{Tr}\,KQ(t)\right)\end{cases}\qquad Q(0)=A,\ \ g(0)=g.$$

これを行列の計算を駆使して解くと

$$Q(t)=\frac{1}{I-\frac{4t}{i\hbar}AK}A,\quad g(t)=g\left(\det\left(I-\frac{4t}{i\hbar}AK\right)\right)^{-1/2}$$

がわかる．ここで行列 X の逆行列は $\dfrac{1}{X}$ のように書いている．行列計算は非可換だから $\dfrac{1}{X}\dfrac{1}{Y}=\dfrac{1}{YX}$ のように計算しなければならない．

$\dfrac{1}{I-AK}A$ が対称行列であることは**玉突き恒等式**と称する恒等式

$$\frac{1}{I-AK}A = A\frac{1}{I-KA} \tag{53}$$

からわかる．

$t=\dfrac{\hbar i}{4}$ とおくと相互変換 I_0^K が得られるが，詳しく書くために記号を単純にして $ge^{\frac{1}{i\hbar}A(z)}$ を $(g;A)$ と表しておくと，

$$I_0^K(g;A) = (g\det(I-AK)^{-\frac{1}{2}}; T_K(A)) \tag{54}$$

となる．ただし $T_K(A)=\dfrac{1}{I-AK}A$ で，これは相互変換の位相部分（e の肩の部分）であり，上の玉突き恒等式 (53) より対称行列である．

逆写像 $I_K^0=(I_0^K)^{-1}$ と合成して $I_0^{K'}I_K^0$ を作れば，

$$I_K^{K'}(g;A) = \Big(g\det(I-A(K'-K))^{-\frac{1}{2}}; \frac{1}{I-A(K'-K)}A\Big)$$

となることがわかる．１変数のときと同様，これは $I-AK$, $I-AK'$ が可逆という条件のもと，２対２の写像として

$$I_K^{K'}\Big(\frac{g}{\sqrt{\det(I-AK)}}; \frac{1}{I-AK}A\Big) = \Big(\frac{g}{\sqrt{\det(I-AK')}}; \frac{1}{I-AK'}A\Big)$$

と書くほうがわかりやすい．いずれにせよ，相互変換そのものが２対２の写像として現れていて，これのほうが自然にみえるのである．$\forall(g;A)$ に対し，

$$\Big(\frac{g}{\sqrt{\det(I-AK)}}; \frac{1}{I-AK}A\Big)$$

は $\{K\in\mathfrak{S}(2m);\ \det(I-AK)\neq 0\}$ 上で定義された２価の平行切断である．ただし，$\mathfrak{S}(2m)$ は対称行列全体である．

●極地元　さらに $\forall A$ に対し，$\{K\in\mathfrak{S}(2m);\ \det AK\neq 0\}$ で定義され，次のように相互変換される少々奇妙な元の集団がある：

$$I_K^{K'}\Big(\frac{g}{\sqrt{\det(-AK)}};-K^{-1}\Big)=\Big(\frac{g}{\sqrt{\det(-AK')}};-K'^{-1}\Big).\qquad(55)$$

実は，このような元も次にやる指数関数 $:e_*^{z\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}A,\boldsymbol{u}\rangle}:_K$ の一つなのだが，位相の部分が A に無関係なだけでなく，$\det A=1$ なら全部同じ元にみえてしまうので奇妙なのである．これを，**極地元**とよんで $\varepsilon_{00}(A)$ と書く．特に $\varepsilon_{00}(I)=\Big(\frac{g}{\sqrt{\det(-K)}};-K^{-1}\Big)$ は $\{K\in\mathfrak{S}(2m);\ \det K\neq 0\}$ 上定義された 2 価平行切断である．これは 1 変数のときの，(32) 式 (p.145) に対応している．

10.3　2 次式の $*$-指数関数

$*$-積の指数関数を一般的に求めるのは，もう少し考察が要るのと，述べ方が複雑になるので，ここでは 2 変数での指数関数

$$e_*^{t\frac{1}{i\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)},\quad u{\circ}v=\frac{1}{2}(u{*}v+v{*}u)$$

をさまざまな表示で書いて一般的性質だけ記すことにする．ここで**一般的性質**とは**ほとんど**すべての（詳しくは $\mathfrak{S}(2)$ の稠密開集合に属する）表示 K で成立する性質のことである．

結果を見て，このような奇妙なことがどうして数学の user で問題にされてこなかったのかを§7.1.1 の立場から考えてみてほしいのである．

まず，$D=c^2-ab$ とする．発展方程式を解くことにより，ワイル表示では次のようになることが，比較的容易にわかる：

$$:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}(au^2+bv^2+2cu\circ v)}:_0=\frac{1}{\cosh\sqrt{D}t}e^{\frac{1}{i\hbar\sqrt{D}}(\tanh\sqrt{D}t)(au^2+bv^2+2cuv)}.$$

ここから相互変換の公式を駆使して一般的性質を拾い出すのだが，その前に次のことに注意する：

●判別式による場合分け　$D=0$ の場合はうまく 1 次変換をすれば，これまで扱ってきた $e_*^{t\zeta_*^2}$ と同じであり，$D\neq 0$ の場合は t を調節すれば $D=1$ としてよく，さらにうまく 1 次変換をすれば $a=b=0$, $c=1$ の場合と同じである．

以下，$D=1$ の場合を扱うが，結果として次のようなことがほとんどすべての表示で成立する性質として浮び上がる：

(a)　$t\in\mathbb{C}$ に関し，実軸と平行な方向両側で $e^{-|t|}$ の速さで急減少．

(b)　虚軸と平行な方向で周期性がある．

したがって，必ず特異点が現れるが，

(c)　特異点は $\sqrt{e^{2t}\text{の 2 次式}}^{\,-1}$ の形で，虚軸に平行に πi-間隔で 2 列現れる．

この場合，特異点の位置は表示 K に依存するが，周期は虚軸に平行な線が特異点列に挟まれているところでは $2\pi i$-周期，それ以外の線に沿っては $2\pi i$-交代周期 $(f(x+2\pi i)=-f(x))$ となる．

話を簡単にするために，以下では generic な表示といったら，次の性質を持っているものとしよう：

(d)　$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\pm\pi i$, $i\mathbb{R}$ 上に特異点はない．このような表示全体は稠密開集合 $\mathcal{O}$ をなすが，これがさらに，虚軸が特異点列に挟まれている場合と，同右側の場合，同左側の場合の 3 通りに分かれる．どれも開集合である．

上のことから，どのような結論が得られるか以下で順番に述べるが，$D=1$ の一般の 2 次式を $2u{\circ}v$ という 2 次式で代表させておく．

●二つの逆元　まず (a) から，§9.2 でやったのと同じで，$\int_{\mathbb{R}} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}u\circ v}dt$ は収束するから，次の積分はともに広義一様絶対収束する：

$$\int_{-\infty}^{0} e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}u\circ v)}dt,\ \mathrm{Re}\,z > -\frac{1}{2}, \quad -\int_{0}^{\infty} e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}u\circ v)}dt,\ \mathrm{Re}\,z < \frac{1}{2}$$

$z=0$ として $\frac{1}{i\hbar}u\circ v$ は二つの逆元を持つ．

●真空　$\frac{1}{i\hbar}u*v=\frac{1}{i\hbar}u\circ v-\frac{1}{2}$ だから (a) より次の極限が存在する：

$$\varpi_{00}=\lim_{t\to-\infty} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}u*v}\neq 0, \quad \lim_{t\to-\infty} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}v*u}=0.$$

ϖ_{00} を真空とよぶ．$u*v*\varpi_{00}=0$ は容易にわかるが，実は

$$v*\varpi_{00}=\lim_{t\to-\infty} v*e_*^{t\frac{1}{i\hbar}u*v}=\lim_{t\to-\infty} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}v*u}*v=0$$

でもある．また $\int_{-\infty}^{0} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}v*u}dt$ も収束し $\frac{1}{i\hbar}v*u$ の逆元となる．これを $\left(\frac{1}{i\hbar}v*u\right)_+^{-1}$ と書く．$v^\circ=\frac{1}{i\hbar}u*\left(\frac{1}{i\hbar}v*u\right)_{*+}^{-1}$ とおくと，玉突き恒等式から容易に $v*v^\circ=1$, $v^\circ*v=1-\varpi_{00}$ がわかる．第 2 の式は玉突き恒等式を使って次のように計算する：

$$\frac{1}{i\hbar}u*\left(\frac{1}{i\hbar}v*u\right)_{*+}^{-1}*v=\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{i\hbar}u*v*e_*^{t\frac{1}{i\hbar}u*v}dt=1-\lim_{t\to-\infty} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}u*v}.$$

10.3.1　真空表現，微積分の代数

上のことを使うと，普通の微積分がこれらの計算公式の中に取り込まれていることがわかる：

$$u*f(u)*\varpi_{00}=(uf(u))*\varpi_{00}, \quad \frac{1}{i\hbar}v*f(u)*\varpi_{00}=f'(u)*\varpi_{00}$$

であるから，$u*$, $\frac{1}{i\hbar}v*$ が u を掛ける，u で微分するという演算子に対応している．$v^\circ*$ が積分演算子に対応していることは次のように

してわかる：

$\left(\frac{1}{i\hbar}v{*}u\right)^{-1}_{+*}=\int_{-\infty}^{0}e_*^{\frac{t}{i\hbar}v*u}dt$ であり，$v^\circ=\frac{1}{i\hbar}u{*}\left(\frac{1}{i\hbar}v{*}u\right)^{-1}_{*+}$ であったから，

$$v^\circ{*}f(u){*}\varpi_{00}=u*\int_{-\infty}^{0}e_*^{\frac{t}{i\hbar}v*u}{*}f(u){*}\varpi_{00}dt.$$

であるが，

$$e_*^{\frac{t}{i\hbar}v*u}{*}f(u){*}e_*^{-\frac{t}{i\hbar}v*u}=\frac{1}{i\hbar}f(e^tu),\quad e_*^{\frac{t}{i\hbar}v*u}{*}\varpi_{00}=e^t\varpi_{00}$$

に注目する．これより，$v^\circ{*}f(u){*}\varpi_{00}$ は

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\hbar}u{*}\left(\frac{1}{i\hbar}v{*}u\right)^{-1}_{*+}{*}f(u){*}\varpi_{00}&=\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{0}f(e^tu)e^tudt{*}\varpi_{00}\\&=\frac{1}{i\hbar}\int_{0}^{u}f(\xi)d\xi{*}\varpi_{00}\end{aligned}$$

となる．このように ϖ_{00} を右端に置いて演算子として表示する方法を真空表現とよぶのだが，この中に普通の微積分が含まれていることがわかるのみならず，例4で与えた群もこのようにして真空表現されるのである．

ということは，これまで述べてきた奇妙なことはすべて普通の微積分の計算にも現れるものである．これらの現象はいわば微積分学という software に初めから組み込まれている bug みたいなものだから微積分学を計算手段として使っている科学（ほとんどの科学）に必ず現れるはずである．ところが現実にはこのような奇妙なことを言う科学者はいない．それは当然で，このような奇妙なことは，数学の user の中では扱っている対象が自然に要求する論理で避けられてきているはずである．これが純数学の中でかなり縮退した形で現れたものと考えられる．これを区別するためになにがしかの数学的

設定をしなければいけないのだが，これが何であるかは純数学の中には書かれていないので，数学の user が暗黙に設定している公準を参考にしながら手探りで話を進めなくてはならないのである．

微積分学を深めるために，微積分学の使われ方を深く知る必要がでてきたわけだが，これ以上精密に述べるためには位相をちゃんと入れて話をしないといけないので，数学的な話はここでやめることにするが，これらを経由して，Dirac の陽電子論がかなり数学的に理解できるようになると思っている(Dirac の海が見たい)．細かいことは現在進行中なので，この先の話は別の機会にゆずることにする．

Dirac の海

「Dirac の海」というのをインターネットで検索すると，出るわ出るわ，何千と出てくる．それだけ人々の夢をかきたてるものには違いない．

2 次の $*$-指数関数は大域的な定義としては 2 価の元だが，計算ルールを制限すると局所的には 1 価の元として扱うこともできる．このような非可換な代数の中で，変数を入れかえるために必要なハミルトニアンとか，極地元の作る代数を構成すると，4 元数を含む代数が見えてくるのである．

11

行動群という考え

正確に伝えようとして，細かい数学をくどくど述べてきたが，これが逆に話をわかりにくくした面もあったかと思うので，最後にまとめとして考え方だけ要約しておこう．以下の部分はほとんど前の稿の繰り返しであるが，これまで述べてきたことの考え方を整理するのに参考になるだろう．

行動科学とよばれているものがあるが，この底のほうの部分に「人は行動によって，すべてを獲得するのである」という考え方がある．私がやろうとしていることを手短かに，かつ大げさに述べてみれば，それは「個人の行動の総体のモデルを数学世界の中に作ることによって，その個人が獲得するであろうすべての概念を数学的に捉えてやろう」ということになろうかと思われる．

神をも恐れぬ暴挙のように受けとめる人もいるだろうが，心配は無用．数学世界の中に構築される行動総体のモデルは，本当の人間の全行動からみればとるに足らぬくらい小さなものでしかないからである．実は私としては，このようなモデルの中に伝統的な微分幾何学が吸収され，さらに量子論が吸収できればそれで満足なのであって，これだけでも十二分に難しいけれども，しかし可能なことだと考えているのである．

いま，君の前に，言葉では自分の意志や考えを述べることがまだできない時期の幼児が一人いるものと想像してほしい．そして，君は影のごとくこの幼児につきまとい，この幼児の言動をつぶさに観察し記録する役目を負っているものとしてみよう．君からみて少しでも意味がありそうに思えたものはすべて記録するのである．後で，この行動記録集を分析することにより，この幼児の内側を知ろうというのである．これは心理学などでよく使われる手段である．これで，その幼児の内側が本当にわかるのだろうか？

行動科学とは，それに yes と答える立場の学問である．個人の尊厳を十二分に認める立場の人は「それでも，こんな観察だけで幼児の内側の全部はわからないはずだ」と述べるであろう．それはもっともなことである．しかし，科学というものは，つねに，伝達可能つまり他人ともわかり合える部分のみを相手にするのである．個人が他人に伝達しえない何ものかを持っているというのはたぶん本当なのだろうが，しかし伝達しえないものは本来科学することもできない性質のものである．「科学」というと立派そうに聞こえるが，こと人間に関しては「科学」と言ったとたんに，人格だの個人の尊厳だのといったものが排除された，外側から見た人間に話が限られてしまうことに注意してもらいたい．私は人生論や人格や，個人が持つ価値観について論じようとしているのではなく，幼児の内側を科学的に分析していこうという立場にあるのである．

さて，この立場で，今度は私が君の作った膨大な記録集を見ている場面を想像してもらいたい．君が与えられた任務を忠実にこなしたのだとすれば，記録集はその幼児が 6〜7 歳になるころには数万冊に達しているはずである．私にとって，その幼児は，君が作った膨

大な記録集以外の何でありえようか？ これが，私にとっての，その幼児のすべてである．私がここで述べたいのは，その幼児を非人間化してしまいたいということではなく，良い悪いは別にして科学というものが伝統的にとってきた手法をあてはめるかぎり，私はこのように考えなければならないのだということである．

きわめて非人間的な冷たい話になったが，今度は，私と君とその幼児とが実は同一人物であると考えてみよう．記録という作業は幼児にはできないが，記憶するということなら幼児にもできる．そして，もう少し後になってその膨大な記憶集から記憶をよびさますこともできるのである．こうしてみると非人間的な冷たさは解消されるであろう．行動科学的にみた人間像というのはこういうものなのである．行動し，記憶し，その記憶を何度も取り出して分析しているのが，君の目の前にいる幼児なのである．

私が君の記録集を読んでいるときの態度を，同一人物であるその幼児にあてはめてみれば，科学という狭い穴を通してみたその幼児とは，彼が過去におこなった行動の膨大な記憶集以外の何ものでもない．しかし，今度の場合には，その幼児が頭の中だけでおこなった行動，つまり，仮想的な行動とか，記憶の中のものを取り出してきて比較するといった行動とか，互いの関連を付けて二つの記憶を一つにまとめて整理してしまうといった，外側から見ていたのではわからないような行動までも含めて記憶されているものと考えねばならないのである．

幼児はこの記憶集を自在に操るのである．そして行動の比重は，外側から見てわかるものから次第に，頭の中だけの行動に移っていくのである．これまで畜積したものを比較したり整理統合したりする

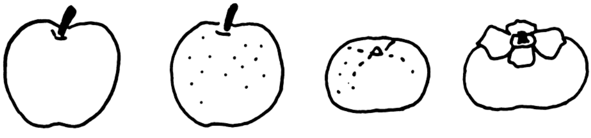
作業が増大してくるのだと思ってよいと思われる．

ところで，自分にとっては「自分のおこなった行動」と「自分のおこなった行動の記憶」というのは実質は同じものであるのだから，以下では行動の記憶という言い方をやめて単に「行動」とよぶことにしよう．私がこれからやろうとしていることは，幼児がある時点で持っている行動の総体の数学的側面だけを捉えてこれを公理化し，そこから出発して，どのようにして因果関係を論理的に記述する方法を獲得するのか，どのようにして空間概念のような幾何学的概念を獲得するのか，そういったことを数学の言葉で考えてみようというのである．そのために，まずこの行動の総体を $\mathbb{B}$ という記号で表示しておこう．しかし，$\mathbb{B}$ の公理系をいきなり書き始めることはできないから，ここでは文章だけで話を進める．

11.1　直観世界

幼児は，自分の行動全体 $\mathbb{B}$ の中に同値関係や半順序関係や擬順序関係を持ち込んで整理分類をおこなっている．こういう作業が頭の中で進んでくることと，言葉の発達とは大きな関連を持っているものと思われる．言語というのはおそろしく抽象的な<u>概念</u>なのであって，おそらく行動の全体から何重にも整理統合され，分類された結果生ずるものであると思われる．

話を視覚的な言語に限ってみると，小学校の 1 年生で次の絵が何を意味するのかわからない者はほとんどいない．



この絵は実物からみればかなり単純化され抽象化されているが，彼らの頭の中で，この程度までの抽象的分類作業が進んでいるわけで，この絵はもはや「文字」としての機能を持っているのである．

●名詞　言語化は日常生活にでてくる物の名前（名詞）のようなものの場合には，それが自分と相手の両方の目の前にあることが多いから，指でさしてその名前を発音しているだけでよい．こういう具体的事物についてはその存在自体が時の流れで変化しないし，どこに移動しても変わらぬ個性を持っているので，伝達性のある言語化は比較的容易で幼児期にすでに完了しているものが多い．

この世に安定して実在しているものには，たいてい名前（名詞）が付いている．少し苦しい解釈だが，それらが「安定して存在し続ける」という“行動”に付けたラベルがそれの名前なのだと考えることにする．あるいは，個人のレベルでいえば名前を付けて記憶するという行動こみで考えるのである．

行動という言葉は普通は個人の自発的意思を伴う場合に使う言葉であるが，ひとつの言葉でなるべく多くのことを含ませたいので，$\forall t$ に対して $\varphi_t\alpha=\alpha$ となるような始終点のない元も $\mathbb{B}$ の仲間に入れておく．そこらに転がっている石ころも「在り続ける」という時ばかり費やす行動をしているのだと考えて $\mathbb{B}$ の仲間に入れる．

これらは分解はできても合成は意味がない．合成演算の埒（らち）外のものである．しかし，分解を通じて概念の包含関係が考えられるから，こういう行動は動詞ではなく名詞として言語化されているものと考えられる．**名詞とは時の流れに対し安定した始終点のない行動に付けられたラベル**のことである．名詞どうしは包含関係には意味があるが，因果的関係は含まないものである．その意味で論理関係のみ

でできているものだから，対応がはっきりすれば互いの論理構造は理解しあえる．しかし，理解しあえるものが因果関係でないことはあきらかであろう．

11.2　行動，半群，群

しかし，言葉が行動に関するものを表している場合には，分類され言語表現ができているようにみえていても，その内容は個人差が非常に大きいのが普通である．「買物に行く」という言葉が，A 君にとってはなにか自分の物を買ってもらえることを意味するのに対して，B 君にとってはスーパーマーケットに母親の運転する車の助手席に乗っていくことだったりするわけである．動作，操作，行動にまつわる言葉は，名詞よりかなり遅れて発達するようにみえるのである．

しかし，このことは幼児にとってそういうものがわかりにくいということを意味しているのではなく，伝達力の十分備わった言葉のレベルに達するにはもう数段階の整理分類作業を必要としているというだけのことである．伝達力は小さくても，その幼児にとっては「買物に行く」という言葉が意味することは明確なのである．言語表現は遅れてはいても，内容は言語表現を獲得したものよりはるかに豊富なのである．

10〜15 歳くらいの子供においては，こういうものの分類もかなり進んでいて，かなりのものが言語化され，言語だけを操って思考活動もおこなうことができるようになっているのだが，その一方で身体の急速な発達に伴って自分の行動の記録（記憶）も急速に増加す

る．その増加の速度はしばしば整理分類の速度をしのぐ勢いであり，記録のほうもこれまでにない行動体験を数多く含むので，これまでのような比較的静的な分類にはなじまないものが多い．すばやい判断，すばやい対応を次々にこなすといった，連続技が必要となってくるのである．

一瞬の判断の遅れが身体に危険を及ぼすようなことも，平気でやってのけるような時期でもある．自分の肉体を自分の意志でほぼ完全にコントロールできるのだろうし，自分の頭の使い方も一定の条件下に意識的に長時間とどめておけるようになってくるのだろうと思われる．行動はかなり言語化されてきているとはいえ，伝達性は低く，言語は，一定の記憶をよびさますために貼られたラベルのようなものでしかない．とはいえ，行動全体のスケールは幼児期のそれからみれば格段に大きいのであって，完全に言語化されている部分などは全体からみたら１％にもみたないもののように思われるのである．

私は，この時期の子供が頭の中に持っている世界を「直観世界」とよぶことにしている．直観世界は10歳から20歳くらいまでの十年間でほとんど完全にでき上がってしまうものであるようにみえるのだが，極めて個性が強く，まして言語化されているなどということは稀(まれ)な天才を除外すればほとんどない．直観世界を構成しているのは行動（の記憶）なのであるが，それを行動全体とよばずに世界という言葉で表現したのは，それらがただの行動の寄せ集めではなく，吟味され，分類され整理され，互いに関係づけられて，ひとつのまとまりのあるものを形成しているようにみえるからである．言語だけでおこなう社会的行動においてはなお幼稚さをみせる彼らも，個

体の人間としてみれば安定したまとまりを示しているのである．自分のことで恐縮だが，私はこの時期に自分が持った直観世界をまだ全部言語化できていないし，たぶんそんなことは一生できないことだと思っている．私の肉体的な行動の体験は 20 歳あたりから急速に減ってしまい，かわってこれまでの行動を分類整理し言語化する作業が大半になってしまったような気がする．そして，この作業行動の記録集を再び分類整理するという，はてしない作業を自分の頭の中でおこなってきたのだという気がする．思考は実際の行動とは違い，行動の記録を反省内化させる作業である．

直観世界は極めて個性が強いものであるが，個々人の中ではまとまっているものである．言語は他人への伝達性は低くても，個人の中では安定した意味の符丁化はできているだろうし，ごく近いものどうしではある程度の伝達性も持っているものである．

直観世界は言語化されていないのであるが，一方で若者は言語化を嫌っているようにもみえる．言葉で表現されるものになにか暗いイメージを持っているように思われるのである．昔ヒットした もんた&ブラザーズの曲に（$\cdots$dancing all night $\cdots$）

「……言葉にすれば……嘘(うそ)にそまる……」

という歌詞があったように，言語表現されたものになにかウソっぽさを感じ，直観世界そのものが自分たちの共通した符号のようなものだけでわかり合えるのだと誤解しているのが，この時期の若者の共通した癖である．

●戦略としての群　行動（𝔹 の要素）はつねに時空の中でおこなわれるものであるのに対し，言葉のほうはいわば時空をとび越して同

一視されてしまっている．このことが，言葉が伝達力を持つ理由なのである．**言語化することは，最低限，時空を超えた同一視を要求するのである**．この同一視の基準を前のほうで言語群とよんで𝔾という記号で与えたのである．

各人はそれぞれ𝔹の中に時空を超えた同値関係を持ち込み言語を形成するのである．だから𝔹は言語表現される以前のものであり，それを𝔾を用いて言語化して初めて伝達可能なものになるのだと考える．

しかし，時の流れ方が人（観測者）によって違うものだと考えているのだから，時空を超えた同一視のしかた（𝔾）も人によって異なる相対的なものである．だから，でき上がる言語系はまだ個々人の直観世界の中の言語系である．これは厳密な意味では言語とよぶべきものではなく，単に符丁とよぶべきものかもしれない．

伝達可能なのは直観世界の中にあるものではなく，それに昇華する以前の行動のほうであるが，完全に生の行動というのも伝達が難しい．生の行動というのは，それをおこなった場所・時間を含めて数多くのディテールを含みすぎていて，逆にわかりにくいのである．言葉というものは，まずこういう細目を忘れてしまうことで構成されるものである．「電車に乗る」という言葉は一定の行動を連想させはするが，いつとか，どこの駅とかは問題でない．しかし，我々が夢で見たりする「電車に乗る」という行動は，もっと具体的でかなりのディテールを含んでいるのが普通である．この，夢で見ているほうが記憶のひとかたまりなのであって，「電車に乗る」という言葉そのものを夢に見ることはないのである．

●群の作用と同値関係　何かを認識するために個人が身の内に持た

ねばならないものは，何をもって同じと考えるかという，同値関係を持ち込むための戦略 (strategy) である．これを持っていないと同値関係が “なまくら” になってしまうからである．その戦略を与えるのが数学でいう「群」なのである．個人は積極的にこれを持たないかぎり安定した同値関係は設定できないのである．これが言語群 $\mathbb{G}$ である．

群の概念は数学では図形のような対象の「対称性を記述する言語」として説明されることが多いが，群の構造は論理的思考，特に同値関係の設定において必ず現れるのだが，無意識に使われていることのほうが多いものである．

完全言語化されている行動には別の群が作用することもある．この群作用を行動とみればこれも完全言語化されている．群の概念は単に対象の対称性を記述する用語としてだけではなく，言語の形成や，思考に論理性を持たせるために有用だということは，ピアジェに限らず多くの教育心理学者が指摘していることである．群 G が集合 S に作用しているとき，その作用 $\lambda : G\times S \to S$ を使って移りあうものは同じものとみて，同値関係を持ち込むことができる．これが同値関係を与えることは次のように考えてわかる：

(1)　$s \sim s$　　$\lambda(e)(s) = s$　($e =$ 単位元)

(2)　$s \sim s' \Rightarrow s' \sim s$　　$\lambda(g)(s) = s' \Rightarrow \lambda(g^{-1})(s') = s$

(3)　$s \sim s', s' \sim s'' \Rightarrow s \sim s''$　　$\lambda(g)(s) = s',\ \lambda(h)(s') = s''$

$$\Rightarrow \lambda(gh)(s) = s''$$

これが，対象に同値律を持ち込むために各自が持つべき戦略なのである．群が先にないと，持ち込む同値律がなまくらになる危険が大きいのである．

前に一つの時の流れに乗って“同じことを何度も繰り返す”と言ったが，時の流れに乗っている場合には行動を特定しないでこの言葉に意味を持たせることができる．しかし時の流れと無関係に“同じ α がたくさんある”と言う場合，「同じ」という言葉は普遍的な意味を持つのであろうか？

普遍的な“同じもの”を定義するための「絶対同値関係」を設定することは不可能だから，ここでもなにがしかの理想化がおこなわれる．

そこで「原理的に区別できないたくさんの同じ行動」とは，$\mathbb{G}$ によって言語化したときに多価（高々可算）になってしまう行動のことだと考えるのである．

同値律を持ち込むためになにかの群 G が関与しているのだが，ここではこの多価性の記述のために群 G が入り込むのである．

11.3　行動の言語化と半群構造

前のほうで直観世界という言葉を使ったが，これは $\mathbb{G}$ を戦略として持ち始めたころの $\mathbb{B}$ のことである．実在の子供で言えばおぼつかない論理で大人に歯向かってくる反抗期の子供である．$\mathbb{G}$ は個人依存のものである．

私がここで取り上げようとしているのは主に $(\mathbb{B}, \mathbb{G})$ がどのようにして時空や，運動に関する言語を作るのかといったことであり，特にその伝達性の限界，互いにわかり合えるものの限界といったものである．

つまり，どのようにしてかは別にして，ともかく各人は成長の過程で行動族 $\mathbb{B}$ に $\mathbb{G}$ による同値律を持ち込んで各人の言語系を組み上

げたはずなのであると考え，$(\mathbb{B},\mathbb{G})$, $(\mathbb{B}',\mathbb{G}')$, $(\mathbb{B}'',\mathbb{G}'')$, $\cdots$ たちが共有できるもの，およびその限界をあからさまにしようというのである．

●半群　「行動」を言語化するということは言葉のレベルでいえば「動詞」を作りだす作業でしかない．実際の行動では「きょう電車に乗って，きのう電車を降りた」といったことは不可能だが，行動が時空を超えて同一視され象徴化されてくるにつれ，二つの行動を合成して考えたり，一つの行動を分解して考えたりすることが自由にできるようになってくる．動詞の特徴はこれがつねに時の順序に従って合成が可能だということである．これは数学では半群とよばれている構造である．実は，私が数学的に表現してみようとしているのはこういう合成とか分解のしくみ，それも我々の時空概念にまつわるものだけであって，決して個人の行動の総体そのものではないのである．数学的にはここから半順序半群というべき構造が見えてくるのである．

単語には名詞も形容詞もあるのに動詞にこだわる理由は，名詞や形容詞はかなり静的な分類によって言語化されるのに対し，操作，変化，行動等は時間の経過や，その速さまでも問題にする動的な分類によって言語化されるので，いやでも「時」というものを考察させられるからである．これまで無意識に使ってきた数学の言語を時間を意識して使い分けることによって新しい考え方を生もうというものなのである．

同時に「時」という基本概念に対しても各人がかなりの曖昧さを含んで理解していることに注目している．いったい「時」とは各個

人にとって何であろうか？　はっきりしていることは，この問題が物理の問題として取り上げられたことはなかったということであろう．

時間の計り方がわかっただけで「時」というものがわかったと考えてしまうのはおかしなことである．数値は同じでもその意味まで同じという保証はどこにもないからである．

●直観世界の再構成　行動の記憶をたくさん含む直観世界は極めて個性の強いものであって，そのまま他人に伝達できる性質のものではない．行動に関係する言葉で言うと，素朴に伝達可能なのは，直観世界に昇華する以前の生の行動のほうでしかない．しかし，伝達不能なものは真理とはよばれない．「真理はつねに二人から始まる」からである．伝達されえないものは社会的には無価値なものである，という伝達性を重視した立場に立つならば，直観世界そのものも，もっと下部の行動の全体のなかから，伝達性を目的として何重にも再構成されねばならないのである．青年期の深い悩みであり，あがきである．伝達性を獲得したものは直観世界から脱落し，嘘にそまって堕落するからである．

●共通世界（物理世界）　直観世界とは対照的に，厳格な言語のみから論理的に組み上げてくる世界もある．

物理学は，概念そのものではないが，測定法を精密に言語化することによって伝達性が達成されたとみる世界である．たとえば「時（とき）」については，時間の計測のしかたが，自然界に実在するある原子がある温度で発振する周波数を基準にして精密に言語化されていて，これによって伝達性を保っているのだが，基準を達成するため，補助に使う基礎言語が多様なので，次に述べる純数学世界の言語からみると，まだかなりの曖昧さを残してはいる．しかし，各

自の直観世界からみればはるかに伝達性は高いから，これを**共通世界**とよんでおく．

●純数学世界　このような観点からみたとき，数学世界は何であるかを言わねばなるまい．数学世界は唯一つの基礎言語（自然数）から構成されるものである．しかし，つきつめて考えると自然数の概念ですら，直観世界から抽象化されてでてきた概念なのである．純数学世界はこれのみを精密化された言語として使い，ここから論理だけを武器として整数，実数，複素数等々おなじみのものを組み上げている世界である．この意味では曖昧さがなく伝達性は極めて高いと考えられている．しかし，構成されている世界はイデーの中にとどまっていて現実とは無関係である．

発達心理学者のピアジェは,「思考」とは行動の内化したものであると言う．実際の行動ではなく，頭の中だけの仮想的行動にすりかわったものが思考だというのであるから，数学世界の中の行動にすりかわったものが思考であると言ってもよいだろう．このように数学世界は純数学世界に集合と論理の構造を取り込んで構成されている．純数学世界が地平を広げるための武器として使ってきたものが論理である．

時空を超えて安定した伝達性のある言語化になった名詞には主に概念の包含関係で“分解”という構造が考えられる．これを数学的に取り出すとブール代数とか束論 (lattice theory) といった代数構造が浮かび上がるが，数学が主に相手にしてきたのは，このように比較的早い時期から言語化され，客観化された対象に対する行動（操作）のみなのである．対象がすでに時空を捨象して言語化されているか

ら，働きかけに対する反応も時空を捨象して言語化されている．行動（操作）という言葉は使ったが実際の時空内での行動ではなく，頭の中だけの行動だからやり直しが自由だし，何度でも繰り返せる行動である．数学的行動は実際の行動とは違うが，その分だけ時空を超えて安定した伝達性のある言語化になっている．

これを時間の前後を組み込めるような概念に変えて因果関係まで記述できる言語にしようというのが夢である．しかし，そのためには実際の行動の言語化についてもっと考えなければなるまい．「行動」という言葉は単に時間の経過に身をまかせるのではなく積極的意志を伴うものだから，時間もはっきり意識されている．

論理的思考のためには群論化しなければならないとはいえ，因果関係を論理関係として読み直すために単純に時間を捨象したのでは元(もと)も子もなくなるから，その筋道は決して単純なものではない．

●二つの時の流れによる共通言語　行動全体に時空を超えた同一視が持ち込まれ言語化されたものが言語でいえば動詞にあたる．各自の直観世界の中で完全言語化された行動は合成を考えることによって半群の構造を持つ．この構造が互いに同型に近ければ，構造の伝達という手段で互いにわかり合えるものではある．

ところで，互いに違う時の流れを持った二人が，自然界がおこなう一つの行動がどのように見えるか対話している場面を想像してもらいたい．共通の対象がなく，互いに抽象的事象について話しあっているときには，言語系の構造が同型であれば話は通じるが，対象が共通なのに見え方が違うことがはっきりした場合には，お互い共通の言語を開発しないかぎり（数値の比較まで込めた）相互理解は不可能であろう．実在のものを相手にする物理，特に運動を記述す

るための共通言語はかなり作りにくいのである.

●動力学「矢は永久に進めない」というパラドックスがあったように純論理的に運動を考えることは難しいのである. 連続体とか極限の概念がなかったせいだと説明されることが多いが, 物理的な意味での時空に数値表現を与えようとする場合には時空内での移動を数値的に記述できる言語を作っておく必要があるので, 運動を記述するための共通言語は微積分学を基礎にして作られている. そうしないと, 計算可能な精密科学にならないからである. しかし, 直観世界がこれを受け入れる下地としては何があるのだろうか?

固定した単独の $\mathbb{G}$ での言語化では運動は記述できず, 特に微分を扱うには複数の $\mathbb{G}$ を同列に考えないと言語化できないと思われる.

●再現性　動詞として言語化された行動は合成を考えることによって半群の構造を持つと述べたのだが, それだけでは単に因果関係を羅列しているだけである. これに法則性（再現性）という論理構造を持ち込むにはこの半群から群を作りださねばならない. 思考においては任意の行動 $\tilde{\varphi}$ に対して逆元（打ち消し）$\tilde{\varphi}^{-1}$ を考えるのは簡単だが, 実際の行動の場合は打ち消しが効かないのが普通だから逆元をどのように考えるかが問題である.

科学実験の場合には同じもの（コピー）をたくさん作っておいて, リセットするということが「打ち消し」にあたるから, これが逆元を考えることに対応すると考えられているのだが, これはどのような意味でだろうか. 完全に同じものが二つあるというのは矛盾した言い方だから, ここでも「同じとみなす」という（人工的）同一視がおこなわれるし, なにがしかの統計処理もおこなわれる.

●多価性　同じものをたくさん作っておいてリセットするという概念を数学的に理想化すれば，多価に言語化された行動にある操作を加えるという意味だと考えねばならないのである．翻って言えば，数学の中で多価に言語化される行動という概念が作れなければ，リセットするという概念自身，厳密な論理性を持ちえないはずであるが，面白いことに§9.2で見たように，微積分の代数の中にすでにそのようなものが入っているのである．

物理でいう素粒子というものはその個数はいえるとしても個々のものは原理的に区別できないものに付けられた名前だから，理想化された数学言語にしようとすると，さらにいろいろなことを考えなければならない．量子論に確率解釈が入り込むのは，まさしくこの「区別できない多数の同じもの」を精密言語化する必要からだと思われる．

●群論化にまつわる問題　現実の行動は絶対に「取り返しのつかないもの」であるのに対し，言語化され論理関係のような言葉で記述された行動はつねに「打ち消し」が効くのである．思考は論理的におこなわれるからつねに打ち消しが効く，このことから論理的思考は群の構造を持つのである．これに対し実際の行動は絶対に取り返しの効かないものであるから，言語として半群化されたとしても逆元は持っていないのである．

論理的思考のためには半群から逆元を考えて群のほうに移行しなければならないのだが，半群から群を構成する問題は非可換半群の場合には一本道ではない．半群がいつでも群の中に埋め込めるなら問題はないだろうが，半群で群の中に埋め込めないものもあるし，群の中に準同型で写像しようとするとかなりの部分を犠牲にしなけれ

ばならないのが普通である．この場合,「何もしないのと同じ」とみなされ犠牲になっている部分の構造はこれまで数学であまり考えられてこなかった問題である．

そうなると，この辺のボタンをかけ違った人はどうなるのだろうか？ 有能な青年ほど，自分の直観世界を信じているものである．同値関係として $\sim$ を選ぶか，$\approx$ を選ぶか，もっと別のものを選ぶかは他人が強制できるものではない．言語化/論理化のためと称して，自分の直観世界をむりやり変えさせられたらどうなるだろうか？ 言葉にするだけで嘘にそまってしまうと思う無垢な連中の正義感は決して「このほうが効率的だから」とか「お金がもうかるから」といった価値観だけで動くものではないし，それを「市場原理」という言葉で飾ってみせたところで変わるものではないのである．おそらく，彼らは言葉に幻滅し，言語以外の表現手段を持つ別の世界に行ってしまうのである．自分の意思と価値観でこの部分を乗りきらないかぎり，若者は理科に来ないばかりか，なにがしかの敵意を持って理科から離れ（頽廃的）芸術へ向かっていくのである．

読者は，自分が教育されていく過程のなかで，頭の片隅，またはノートの片隅に「別の可能性」という言葉を書きつけた記憶はないだろうか？　ねじまげられる直観世界が，押しつけられた言語世界に対して発する悲鳴である．

11.4 創造性

数学とは人類が何百年もかかって精巧に組み上げてきた言語体系であると私は思っている．そして幾何学的諸概念は，直観世界の内にあるものを表現するために作られた数学内のモデルである．そのモデルは，しばしば直観世界の内にあるものを明確に表現するためにも使われてきたのである．

ところで，多様体という幾何学的概念は，我々が直観世界の内に持っている時空という概念を研ぐのに役立っているであろうか？ 多様体は素朴な意味での真空のモデルでもあったのだが，今日の場の理論が考える真空というのは，決して空虚な容器としての真空ではない．第一，エネルギーすら存在しない，時の流れすらない容器としてだけの多様体が，本当に最初からあったのだと考えている人はあまりいないようにみえる．今日では，多様体は，それがないと理論 (Lagrangean) を書き始めることができないから，というただそれだけの理由によって最初に仮定されてしまう，いわば必要悪なのである．

産まれたばかりの赤子は白紙であって，個数や時空などという概念を持っているわけではない．幼児が持っているのは膨大な行動の記憶だけである．唯脳論的態度をとるかぎり，幼児は成長していく過程，言語化を進める過程のどこかで，個数の概念 (数学の基本概念)，そして時空の概念 (幾何および物理の基本概念) をも獲得したのであると考えなければならないわけである．それは，どのようにしてであろうか？　話をこの部分に限るならば，それの数学的モデルというものが作れても不思議はないであろう．大げさな述べ方を

してきたが，私の望みはささやかなものである．とは申せ，これこそ現代物理学の最前線が悪戦苦闘している難問なのである．「時とは何か」に答えないまま，重力理論の量子化ができると思っている若い物理学者はもはや居ないのである．

ここでの私の基本的信念は「個人がおこなう行動も大自然がおこなう行動も言語化され論理化されてくると，最後には極めてよく似た，あるいは同型な数学構造を持ってくる」というものである．このように考えてみると，唯脳論的立場からどのようにして自然科学に対する方法論を生み出せばよいかが見えてくるのである．つまり，各自が持っている直観世界を純粋，正直に解析するなら（それが可能なら）それだけで,「時」がおこなう行動も見えてくると思っているのである．(無論，この本の中でそれができているわけではないが . . .)

このような考え方はピアジェが発達心理学を考えるときの考えを逆向きに使った考え方だとも言えると思う．彼は論理学や数学を理性の公理学と考える立場をとっていたようで，　思考心理学のよいモデルであると考えていたようである．そして「個体発生は系統発生を繰り返す」という進化論の考え方を「(個々人の）思考の発達は科学（特に最も純粋な数学）の発達史を繰り返す」に置き換え，これを発達心理学の方法論としたように私には思える．

創造性なるものを言葉で云々することは簡単なことだが，個人の創造性というものは決して言語世界や論理世界の中にあるのではなく，あくまで直観世界の中にあるのである．創造性の高い人というと,「頭のよい人」と言っているように聞こえるかもしれないが，し

かし，世間一般では自分の直観世界をあやふやな言語や矛盾だらけの言葉でしか表現できないような人を「頭のよい人」とは言わないようである．相手に論理的矛盾を指摘されて，それでも黙らないような人は，その論理さえもわからない馬鹿者だとされてしまうようである．ところで，これまでにも見てきたように，言語化や論理化は狭い直観世界のほうがやりやすい．こういう直観世界を持っている人のほうがしばしば明快な言語，明快な論理を操るので，世間はだいたいこういう人たちのほうが能力が高いと評価するように思われる．そして実際，管理が行きとどいた社会ではこういう人たちのほうが社会的地位も高いようにみえる．無論，まれには広い直観世界と高い言語能力とを兼ね備えた天才が出現することはあるのだろうが，こういうのは例外で，たいていの人は，広い直観世界か，高い言語能力かのどちらかしか持っていないようにみえる．そして，官僚はいつでも言語世界にしか味方しないようにみえるのである．

参考文献

この文章を書くときに，参考にしたり，念頭においたりした文献は次のものである．

[1] 波多野完治編：ピアジェの発達心理学，国土社，1965.

[2] フラベル：ピアジェ心理学入門，明治図書，1969.

[3] ブルバキ：数学原論，代数 5，東京図書，1984.

[4] 大森英樹：量子化された微分幾何学へ向かって，科学（岩波），vol.50，no.10（1980）

[5] 大森英樹：なぜ多様体が必要なのか，科学（岩波），vol.52，no.12（1982）

[6] 大森英樹： 力学的な微分幾何，日本評論社，1989.

[7] 大森英樹・吉岡 朗：直観世界からの微・積分入門，遊星社，1984.

[8] 高橋 康：古典場から量子場への道，講談社，1981.

さらに，今回の版を書くときに参考にしたり，頭においているのは

[9] 平井 武・山下 博：表現論入門セミナー，遊星社，2003.

[10] E. マッハ（野家啓一編訳）：時間と空間，叢書ウニベルシタス，法政大学出版局，1981.

[11] 大森英樹・前田吉昭：量子的な微分・積分，シュプリンガー・東京，2004.

[12] 大森英樹：数学のなかの物理学，東京大学出版会，2004.

[13] P. C. W. デイビス（戸田盛和・田中 裕 共訳）：時間の物理学，培風館，1979.

[14] R. Schafer : Introduction of nonassociative algebras, Academic Press, 1966.

最後に述べた代数表示の変形論については，これは目下建設中であって，こまぎれの論文しかないから，まとまった解説は別の機会にゆずる．

索　　引

●記号

$\mathbb{B}$（行動）　14, 18, 117, 119
$\mathbb{G}$（言語群）　34, 101, 174, 175
$\tilde{\mathcal{G}}$（多時間群）　102
$\mathcal{M}$（時空多様体）　63
$\mathfrak{M}$（無為）　109, 118

●あ行

1 径数部分群　88, 89, 91, 93
位置ベクトル　37
因果構造　64, 71, 113

●か行

可換群　85
ガリレイ (Galilei) 変換　35
擬順序　17
共形ローレンツ (Lorentz) 変換　98
共変微分　48
共変全微分　48
曲面片　38
クリストッフェル (Christoffel) 記号　45
群　33, 76, 84, 85
群論の用語　33
計量テンソル　44
結合律　33, 87, 134, 153
言語群 $\mathbb{G}$　34, 101, 174, 175
交換子　96
行動 $\mathbb{B}$　14, 18, 117, 119
弧長パラメーター　38
固有時　65

●さ行

作用　76, 89, 103, 116, 175
時間的曲線　63
自己同型　85, 89
指数因子　141
指数写像　89, 91, 152
射影　96
準同型　85
剰余空間　96
剰余群　96
シンプレクティック形式　79
正規部分群　87
正準共役　80, 82
世界線　63
接触形式　79
線素　44, 61
センター　87, 96, 98
全単射　85, 88, 89, 152

相互変換　135, 137, 149, 156
測地線　46, 63, 76

●た行

第 1 基本量　44, 56
多価・・・　115, 144, 176, 182
玉突き恒等式　160, 163
単位元　33, 116
同値・・・　14, 17, 33, 84, 96, 127

●な行

内積　38, 39, 43, 56, 63, 77, 95, 99
内部エネルギー　71
なまくら　16, 33, 175
null-・・・　63, 65, 76, 100

●は行

ハイゼンベルグ (Heisenberg) 群　87
ハミルトン (Hamilton) 系　81
半群　116, 117, 121, 177, 180, 182
半順序集合　18
半直積群　90
非可換トーラス　158
非退化　87
左変換　88, 91, 97
微分写像　88, 97
不確定性原理　82
不定値計量　60
部分群　34
部分半群　34, 97
平行・・・　48, 157
変分学の基本補題　52, 80

●ま・や行

ミンコフスキー (Minkowski) 空間　86
無為 $\mathfrak{M}$　109, 118
無限小生成元　90
ヤコビ (Jacobi) の楕円テータ関数　140

●ら行

リセット　120, 125, 181
例 1 ～ 7　87–90, 93, 96, 99
零錐　77, 97, 98, 101
連続切断　102
ローレンツ (Lorentz) 計量　62
ローレンツ (Lorentz) 内積　95, 97
ローレンツ (Lorentz) 変換　98, 103

●わ行

歪対称　87, 92, 95, 152
ワイル (Weyl) 代数　154

著者紹介

大森英樹 (おおもり・ひでき)

1938年 兵庫県に生まれる

1961年 東京大学理学部数学科卒業

現　在 東京理科大学理工学部嘱託教授．理学博士

専　門 幾何学

主　著 『力学的な微分幾何』(日本評論社)
『多変数の微分積分』(裳華房)
『直観世界からの微・積分入門 (新装版)』(共著，遊星社)
『量子的な微分・積分』(共著，シュプリンガー・ジャパン)
『数学のなかの物理学』(東京大学出版会)

幾何学をみる③

幾何学への新しい視点——不確定性と非可換時空

2008年10月13日 第1版第1刷発行
2010年10月16日 第1版第2刷発行

定価はカバーに
表示しています

著　者 大森英樹
発行者 西原昌幸
発行所 遊 星 社
164-0001 東京都中野区中野3丁目50-1
電話 (03)3381-5914 振替 00140-5-137657
発売元 星 雲 社
112-0012 東京都文京区大塚3丁目21-10
電話 (03)3947-1021 Fax (03)3947-1617

印刷・製本＝平河工業社 ISBN978-4-434-12427-3